2020 秋图论 final

2021 年 7 月 31 日

1.(10 分) 证明 Ramsey 数 $R(3,3)=6$.

2.(10 分) 设图 G 的最小度 $\delta(G)\geq 2$, 证明图 G 必含长至少为 $\delta(G)+1$ 的圈.

3.(12 分) 证明阶数 $n\geq 3$ 的 2 部简单平面图至多有 $2n-4$ 条边, 并举例说明该上界是紧的.

4.(12 分) 设 $N=(D_{xy},c), f$ 是 N 中 (x,y) 流.C 为 N 中指定正向的圈, 用 C^+ 和 C^- 分别表示 $E(C)$ 中与 C 的正向和反向一致的边集. 令

$$\sigma(a)=\begin{cases} c(a)-f(a), & a\in C^+, \\ f(a), & a\in C^-. \end{cases} \tag{1}$$

并令

$$\sigma = min\{\sigma(a): a\in E(C)\}. \tag{2}$$

定义

$$\overline{f}(a)=\begin{cases} f(a)+\sigma, & a\in C^+, \\ f(a)-\sigma, & a\in C^-, \\ f(a), & o.w. \end{cases} \tag{3}$$

证明:$\overline{f}$ 是 N 中 (x,y) 流且流值不变.

5.(12 分) 图 G 的色多项式 (chromatic polynomial)$\pi_k(G)$ 是 G 中不同点 k 染色的数目,

(1) 若 G 是简单图, 则对任何 $e\in E(G)$, 均有 $\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e)$;

(2) 求 n 阶树的色多项式.

6.(12 分) 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族. 证明存在 $x \in X$ 使得 $A_1 \bigcup \{x\}, A_2 \bigcup \{x\}, \cdots, A_n \bigcup \{x\}$ 互不相同.

7.(10 分) 设图 G 为 n 个顶点 m 条边的简单图, 证明 G 有一个边数至少为 $\frac{m}{2}$ 的边割集.

8.(10 分) 证明:3 正则 Hamiltonian 图可以 3 边染色.

9.(12 分) 设 $n \geq 2s$. 用 P_n 表示 n 个点的路,$I_1, I_2, \cdots, I_s$ 是 P_n 的 s 个 s 元独立集. 证明: 存在 P_n 的 s 元独立集 I 使得 $|I \bigcap I_i| \geq 1$ 对每一个 $1 \leq i \leq s$ 成立.