中国科学技术大学 2020–2021学年第1学期期末试卷

课程名称：概率论　　日期：2021年3月13日　　开课院系：数学科学学院

[redacted]

题号	1	2	3	4	5	6	总分
分数							

1. (15分) 2020年12月，中国科学技术大学潘建伟、陆朝阳等与人合作构建了76个光子的“九章”量子计算机，实现了具有实用前景的“高斯玻色取样”任务的快速求解。“九章”实现的玻色取样牵涉到矩阵的积和式：

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{\sigma \in S_m} \prod_{i=1}^{m} a_{i,\sigma(i)},$$

这里$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m}$为$m$阶方阵而$S_m$为置换群. 设$\{a_{i,j}^{(k)} : 1 \le i,j \le m, k \ge 1\}$相互独立且均服从取值$\pm1$的对称Bernoulli分布，定义$m$阶矩阵列$A_k = (a_{i,j}^{(k)})$. 对固定$m$, 试选择适当数列$b_n, c_n$来验证$(T_n - c_n)/b_n$服从中心极限定理，这里

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Per}(A_k).$$

2. (20分) 当X与Y为独立同且服从均值为0方差为1/2的正态分布时，称$Z = X + iY$为标准复高斯随机变量. 回答：(i) 对非负整数j,k, 验证$\mathbb{E}(Z^j \bar{Z}^k) = k!\delta_{jk}$; (ii) 若$Z_1$与$Z_2$ 为独立的标准复高斯随机变量，对正整数m求期望$\mathbb{E}(|Z_1 - Z_2|^{2m})$.

3. (20分) (i)若$\phi(t)$为特征函数，则$\phi^2(t), |\phi(t)|^2$亦如此；(ii) 求特征函数$\cos^2 t$对应的分布函数.

4. (15分)设随机变量列$\{X_k\}$ 独立同分布，且均服从$[0,a]$上均匀分布，令

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

试回答(i) 证明$M_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a$; (ii) $M_n \xrightarrow{\text{a.s.}} a$是否成立?

5. (15分)$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m}$为一实对称随机矩阵, 矩阵元$\{a_{i,j} : 1 \le i \le j \le m\}$为相互独立的零均值高斯随机变量列.若$\{a_{i,i} : 1 \le i \le m\}$方差均为2, $\{a_{i,j} : 1 \le i < j \le m\}$方差均为1, 试证明：任给正交矩阵$Q$, QAQ^{-1}与A同分布.

6. (15分)设零均值随机变量列$\{X_k\}$两两不相关，且对所有k均有$\mathrm{Var}(X_k) \le C$, 这里C为正常数. 记

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad D_n = \max_{n^2 \le k < (n+1)^2} |S_k - S_{n^2}|.$$

证明(i) $D_n/n^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$; (ii) $S_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.