

# 中国科学技术大学

## 2020-2021学年泛函分析期中考试

授课教师：刘聪文、许小卫

整理：黄泰来

姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_

1. (50分) 判断正误 (证明或者举反例说明你的结论):
  - (i)  $\bar{A} = \{x \in X : \text{dist}(x, A) = 0\}$ , 这里  $A$  是度量空间  $X$  中任一非空集合.
  - (ii)  $C[0, 1]$  是  $L^p[0, 1]$  的闭子空间, 这里  $1 \leq p < \infty$ .
  - (iii)  $C[0, 1]$  上的标准范数  $\|f\|_\infty := \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$  不能由某个内积导出.
  - (iv) 紧致度量空间一定完备.
  - (v) 任何两个相同维数的有限维赋范线性空间既是代数同构的, 又是拓扑同胚的.
  
2. (15分) 设  $(X, \rho)$  是一个完备度量空间.  $\{E_n\}_{n=1}^\infty$  是  $X$  中一系列非空闭集, 满足
$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} E_n = 0,$$
其中  $\text{diam} A := \inf\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ . 求证:  $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$  是一个独点集.
  
3. (15分) 设  $X$  是 Hilbert 空间,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  是  $X$  中正交集. 证明:  $\left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\}_{n=1}^\infty$  在  $X$  中收敛当且仅当  $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2 < \infty$ .
  
4. (10分) 设  $X$  是内积空间,  $Y$  是  $X$  的闭子空间. 求证: 在商空间  $X/Y$  上存在一个内积, 使得由此内积导出的范数为  $X/Y$  上商范数.
  
5. (10分) 设  $X$  是赋范空间,  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$  线性无关. 证明:  $\exists \epsilon > 0$ , s.t., 只要  $\max_{1 \leq k \leq n} \|y_k\| < \epsilon$ , 则  $\{x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n\}$  线性无关.