中国科学技术大学数学科学学院
2020学年秋季学期考试试卷（A）

课程名称　泛函分析　　　课程编号　001014

考试时间　2021年3月5日　　　考试形式　闭卷

姓名＿＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿＿　　学院＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、（15分）设 X, Y 是赋范空间, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. 证明: T 的算子范数 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_X < 1} \|Tx\|_Y$.

二、（15分）设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 中的向量序列, 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. 证明: 存在 $x \in X$ 使得 $\lim\limits_{N\to\infty} \left\| x - \sum\limits_{n=1}^{N} x_n \right\| = 0$.

三、（15分）设 X 是赋范空间, V 是 X 的子空间. 证明: V 在 X 中稠密当且仅当 $V^{\perp} = \{0\}$. 这里 $V^{\perp} := \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall x \in V\}$ 是 V 在 X^* 中的零化子空间.

四、（15分）设 X, Y 是两个赋范空间, $\dim X < +\infty$. 证明: X 到 Y 的线性算子一定有界.

五、（15分）设 X 是 Banach 空间, $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一列闭子空间, 使得 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n = X$. 证明: 存在某个 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $V_{n_0} = X$.

六、（10分）设 X 是 Hilbert 空间, 点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ 且 $x_n \xrightarrow{w} x$, 证明: $x_n \to x$.

七、（10分）设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. 定义算子

$$A : \ell^2 \to \ell^2, \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \longmapsto (0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots).$$

求 $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$.

八、（10分）设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 X 上的一列有界线性算子, 满足: 对任何 $x \in X$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x\| \to 0$. 证明: 对任何紧算子 K 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n K\| \to 0$.