2020年秋季学期泛函分析(H)期末考试

整理：叶子恺　录入：章俊彦

主讲教师：黄文　2021年3月7日

一、设$T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$为$Tf(x) := \int_0^1 x^2 y f(y) dy$, 求算子范数$\|T\|$.

二、设函数列$f_n(t) = \chi_{[2^n, 2^{n+1}]}(t)$. 问:

(1) 在$L^p(\mathbb{R})$中，是否有$f_n \rightharpoonup 0$?

(2) 在$(L^1(\mathbb{R}))^*$中，是否有$f_n \rightharpoonup^* 0$?

三、设H是Hilbert空间，$T : H \to H$满足$\forall x, y \in H$, $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$. 计算$T$的谱半径，并证明$T$的连续谱值的模长都为1。

四、设$\{\sigma_n\}$是l^2中的规范正交基，定义

$$T(x_1 \cdots, x_n, \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i/n} x_n \sigma_n.$$

(1) 证明：T是Fredholm算子，且$\mathrm{ind}(T) = 0$.

(2) 若n充分大时有$e_n = (0, \cdots 0, , \underbrace{1}_{\text{第n位}}, 0, \cdots)$. 证明：$\sigma(T)$是以1为聚点的至多可数集。

五、设(X, d)是紧度量空间，$H(X) = \{A | A为X中的非空闭集\}$，定义

$$L(A, B) := \max\{\sup_{x\in A} d(x, B), \sup_{y\in B} d(y, A)\}.$$

(1) 证明: $(H(x), L)$是紧度量空间

(2) 设S_1, S_2是(X, d)到自身的压缩映射。证明：存在唯一的$K \in H(X)$使得$K = K(S_1) \cup K(S_2)$.

六、设X为Banach空间，$T : X \to X^{**}$是线性算子，$D(T) = X$。若存在$C > 0$，使得$\forall x \in X$都有

$$\langle T(X), x\rangle := T(x)(x) \geq -C\|x\| - C.$$

证明: T是有界线性算子。

七、设$(\cdot, \cdot)$为$\mathbb{R}^d$标准内积，$\|\cdot\|$为$\mathbb{R}^d$的标准范数。

(1) 设$K_1 \cdots, K_r$为$\mathbb{R}^d$中的凸集，$x \in \mathbb{R}^d$满足：x不能被表示为$\sum_{i=1}^r c_1 x_i$，$c_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r c_i = 1$, $x_i \in K_i$. 证明：存在$x \in \mathbb{R}^d$ 使得$(u, x) = 1, (u, y) \leq 1, \ \forall y \in K_i$.

(2) 设$\|\cdot\|_1$为$\mathbb{R}^d$上的一个范数，定义$\|\cdot\|_1^*$为

$$\|u\|_1^* := \sup\{(u, v) | v \in \mathbb{R}^d, \|v\|_1 \leq 1\}$$

证明：对任意$x \in \mathbb{R}^d$, 存在y, z使得$x = y + z$, 且$\|y\|_1 + \|z\|_1^* \leq \|x\|$.