

代数几何初步

Jan 13<sup>th</sup>, 2021

19:30 ~ 21:30 并延时 15 min

(原卷英文, 按记忆中的内容记下试卷, 可能有少许偏差)

1. (1) 给出代数簇维数的定义

(2) 若代数簇之间的态射  $f: X \rightarrow Y$  是满射, 证明  $\dim X \geq \dim Y$

(10')

2. (1) 给出仿射簇的定义

(2)  $A^2_{(x,y)} \setminus \{x=0\}$  是否是仿射簇? 计算  $\Gamma(A^2_{(x,y)} \setminus \{x=0\})$

(3) 计算  $\Gamma(A^2_{(x,y)} \setminus \{(0,0)\})$ ,  $A^2_{(x,y)} \setminus \{(0,0)\}$  是否仿射?

(15')

3. (1)  $Z$  是  $A^2$  在  $(0,0)$  处爆破, 给出两个覆盖  $Z$  的开集, 且它们均与  $A^2$  同构

(2) 爆破  $C: x^{m+1} - y^n = 0$  为  $\tilde{C}$ , 证明  $\tilde{C} \cong A^1$

(15')

4. (1) 将  $P^1 \times P^2$  嵌入某个  $P^N$  并写出定义式

(2) 给出一个  $P^2$  到  $P^1 \times P^1$  的 birational map

(3) 证明不存在  $P^2$  到  $P^1 \times P^1$  的 birational morphism

(15')

5. (1) 在  $A^3$  中  $f = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $g = x + y + z^3$ , 证明  $V(f, g)$  同构于一平面曲线

(2) 给出任意代数曲线上 simple point 的定义

(3) 证明对于  $A^3$  中的曲线  $V(f, g)$ ,  $P \in V(f, g)$  simple  $\Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} \Big|_P = 2$

(15') (第(3)问是一般情况, 与(1)无关)

6. 给定  $P^2$  中的曲线  $F = X^5 + Y^5 + Z^5$ ,  $D_0 = \text{div}(X+Y)$ ,  $K$  是  $F$  的正则除子

(1) 证明  $F$  非奇异

(2) 求  $F$  的亏格  $g$  和  $\deg(K)$

(3) 陈述 Riemann-Roch 定理并证明  $l(K) = g$

(4) 证明  $D_0 = 5P_0$ , 其中  $P_0 = [1, -1, 0]$ , 并求出  $n \geq 3$  时的  $l(nD_0)$

(5) (记不太清楚) 求  $l(D_0)$ ,  $l(D_0)$  的一组基 <sup>→ 有没有这一项任务?</sup>

(6) (记不太清楚) 计算  $l(D_0 - P_0)$ ,  $l(D_0 - 2P_0)$  <sup>→ 是 - 般的  $P$  还是  $P_0$ ?</sup>

(7) 计算正则除子  $\text{div}(K)$

(30')

记录: icourse.club 用户 "阿诺尔德的猫", id 为 2603