2020复几何期末试题

2020.06.23

1. (15分) 设η是$\mathbf{C}^n$上的全纯函数，f是$\mathbf{C}^n$上的多重次调和函数，证明：

   (1), $e^{|\eta|^2}$必是$\mathbf{C}^n$上的多重次调和函数；

   (2), f必是$\mathbf{C}^n$上的次调和函数。

2. (10分) 设M，N是两个复流形，$f: M \to N$是全纯映照。证明：如果θ是N上的$(1,1)$-形式，则拉回形式$f^*\theta$必也是M上的$(1,1)$-形式。

3. (10分) 令M是一复流形，证明：其上必自然诱导一近复结构J,并且其Nijenhuis-张量消失。($N^J(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]$,for all $X, Y \in \Gamma(TM)$.)

4. (30分) 设(M,J,g)是一紧致无边Kähler流形，记ω是其Kähler形式，∇是其黎曼联络。证明：

   (1), 设$(z^1,\cdots,z^n)$是局部复坐标，则$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^i}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = 0$;

   (2), 设$X \in \Gamma(T^{1,0}M)$是一全纯向量场，假设g的Ricci曲率处处非正，则X必是平行向量场;

   (3), 假设$c_1(M) = 0$,如果g的数量曲率为常数，则其Ricci曲率必恒为零.

5. (35分) 设(M,ω) 是一紧致无边Kähler流形，E是其上复向量丛。

   (1) 设D是E上的一个联络，证明D是平坦的(i.e.$F_D = D^2 = 0$)当且仅当对任何点$p \in M$必存在一领域U $(x \in U)$和其上E的局部基$\{e_i\}_{i=1}^r$满足$De_i = 0$, $i = 1,\cdots,r$。

   (2), 设$(E,\overline{\partial}_E)$是一全纯丛（i.e.$\overline{\partial}_E^2 = 0$），$H$是$E$上一Hermitian度量。证明必$E$上存在唯一的联络$D_H$，使得其和度量$H$相容并且$D_H^{0,1} = \overline{\partial}_E$.

   (3), 设$(E,\overline{\partial}_E)$是一$\omega$-稳定的全纯丛，令$H_1$和$H_2$是$E$上两Hermitian度量并满足：

$$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{H_i} = f_i Id_E, \quad i = 1, \quad 2, \tag{1}$$

这里F_{H_i}是对应于度量H_i陈联络的曲率，f_i是实值函数。证明：必存在M上的实值函数φ使得$H_2 = e^{\varphi} H_1$