中国科学技术大学期末试卷

2020—2021 学年第 1 学期 A卷

课程名称: 代数拓扑 　　　　课程编号: MA 0431101

考试时间: 2021年1月 　　　　考试形式: 闭卷

学生姓名: ________ 　　　　学　　号: ________

授课教师：宋百林

1. (32 分)

   (a) $H_1(S^1,\mathbb{Z})\cong$ ________。

   (b) $H_4(\mathbb{R}P^8,\mathbb{Z})\cong$ ________。

   (c) $H^1(M_g,\mathbb{Z})\cong$ ________。

   (d) $H_1(N_g,\mathbb{Z})\cong$ ________。

   (e) 作为环, $H^*(\mathbb{C}P^n,\mathbb{Z})\cong$ ________。

   (f) 找两个有相同同调群但不同伦等价的空间: ________。

   (g) M 是n维可定向闭流形，$H^n(M,\mathbb{Z})\cong$ ________。

   (h) M 是n维不可定向闭流形，$H^n(M,\mathbb{Z}_2)\cong$ ________。

2. （6分）构造从$\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$到$S^{n-1}$的强形变收缩（写出表达式）。

3. （10分）证明：对任意n，$\tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_{n+1}(SX)$.

4. （10分）X 和Y 为有限的CW 复形，证明: $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$。

5. （8分）$n > 0$,构造一个满射$f : S^n \to S^n$, $\deg f = 0$.

6. （10分）$f : S^n \to S^n$ 连续, 若$\deg f = d$, 证明对任意交换群，$f^* : H^n(S^n; G) \to H^n(S^n; G)$, $f^*(a) = da$，$a \in H^n(S^n; G)$.

7. （10分）M是三维闭流形，$H_1(M,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^r\oplus F$，$F$ 是有限群。证明，若M可定向，则$H_2(M;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^r$；若$M$不可定向，则$H_2(M;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^{r-1}\oplus Z_2$.

8. （14分）(a) 利用上积(cup product)，证明:若$n>m$, 不存在映射$\mathbb{R}P^n\to RP^m$使得$H^1(\mathbb{R}P^m,\mathbb{Z}_2)\to H^1(\mathbb{R}P^n,\mathbb{Z}_2)$不平凡。与之对应的$\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}P^n$的结果是什么样的。
(b)证明Borsuk-Ulam定理：每个连续映射$f:S^n\to\mathbb{R}^n$,存在$x\in S^n$，$f(x)=f(-x)$. (若任意$f(x)\neq f(-x)$, 令$g:S^n\to S^{n-1}$,

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x))}{|f(x)-f(-x)|}.$$

从而得到映射$\mathbb{R}P^n\to RP^{n-1}$, 再利用(a)。)