2019年春季学期拓扑学(H)期中考试
原卷为英文版

整理人：章俊彦　zhangjy9610@gmail.com

主讲教师：王作勤

一、默写定义（20分，每题4分）

设$(X,\mathcal{T})$拓扑空间，写出如下定义：

（1）道路连通；

（2）正规(normal)；

（3）序列紧(sequentially compact)；

（4）可度量化(metrizable)；

（5）局部紧(locally compact)；

（6）可分(separable)。

二、判断题（20分，每题2分）

（　）任何度量空间都等距同构于某个完备度量空间的子集；

（　）任一拓扑空间都同胚与某个紧拓扑空间的子集；

（　）紧集必是闭集；

（　）度量空间中的有界闭集必是紧集；

（　）度量空间必是仿紧(paracompact)的；

（　）对任意子集$A\subseteq X$, 导集A'是闭集；

（　）若子集$A\subseteq X$道路连通，则闭包$\bar{A}$也道路连通；

（　）若$f:X\to Y$连续，且X is limit point compact, then so is $f(X)$;

（　）若$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$连续，$S\subseteq\mathbb{R}^2$是可数集，则$f(\mathbb{R}^2-S)$是$\mathbb{R}$中的区间；

（　）若$f:X\to Y$连续，$A\subseteq X$是闭子集，则$f(A)$也是闭集；

（　）$\mathbb{R}^2$不同胚于S^2.

三、双项选择题（15分，每题3分）

（1）任何度量空间(X,d)是__________的。

A. 第二可数　　B. Hausdorff　　C. 第一可数　　D. 连通

（2）“若X,Y都有性质（P），则$X\times Y$也具有性质（P）”这句话若成立，则性质（P）可以是__________.

A. 第二可数　　B. Hausdorff　　C. 仿紧　　D. 正规(normal)

（3）“若X具有性质P, 则任何子集$Y\subseteq X$也具有性质（P）”这句话若成立，则性质（P）可以是__________.

A. 第二可数　　B. 紧　　C. 可度量化　　D. 道路连通

（4）$\mathbb{R}$上的Sorgenfrey拓扑是__________的。

A. 第二可数　　B. Hausdorff　　C. 第一可数　　D. 可度量化

（5）$[0,1]^{\mathbb{R}}$上的乘积拓扑是__________的。

A. 可度量化　B. 紧　C. 完全不连通(totally disconnected)　D. Hausdorff

（6）以下哪些集合是$C([0,1]\to\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty)$的稠密子集？

A. $\{\sum_{k=0}^n a_k x^k : n\in\mathbb{N}, a_k\in\mathbb{R}\}$　B. $\{\sum_{k=1}^n a_k x^k : n\in\mathbb{N}, a_k\in\mathbb{R}\}$

C. $\{\sum_{k=0}^n a_k e^{kx} : n\in\mathbb{N}, a_k\in\mathbb{R}\}$　D. $\{\sum_{k=0}^n a_k \cos(2k\pi x) : n\in\mathbb{N}, a_k\in\mathbb{R}\}$.

四、（15分）

（1）什么是闭映射？

（2）投影映射$\pi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto y$是不是闭映射？

（3）投影映射$\pi:[0,1]\times[0,1]\to[0,1],(x,y)\mapsto y$是不是闭映射？

五、（15分）度量空间(X,d)被称作“超度量空间”是指下式成立：

$$d(x,y)\le \max\{d(x,z),d(z,y)\},\ \ \forall x,y,z\in X.$$

（1）证明：任意超度量空间中，每个开球都是闭集；

（2）设$aA\subseteq X$至少含有两个点，证明A不连通；

（3）证明：超度量空间中$\{x_n\}$是柯西列，当且仅当$d(x_n,x_{n+1})\to 0$ as $n\to\infty$.

六、（15分）

设$X=[0,1]\mathbb{N}$是$[0,1]$的可数积，考虑子集

$$A=\{a=(a_1,a_2,\cdots): a_k\neq 0\text{仅对有限个k成立}\}$$

（1）证明：在箱拓扑下，A不是X的稠密子集；

（2）证明：乘积拓扑下，A是X的稠密子集；

（3）赋予X以一致收敛拓扑，问A是否为X的稠密子集？证明你的结论。

七、（15分）

设X是紧集，Y是Hausdorff空间，Z是拓扑空间。设$f:X\to Y$是连续映射。

（1）若f是满射，证明$g:Y\to Z$是连续映射当且仅当$g\circ f$是连续映射；

（2）f不是满射时，（1）的结论不对，请给出反例；

（3）证明（1）中哪一步在f不是满射时过不去？

八、（15分）

设X是紧Hausdorff空间，从而是正规拓扑空间。考虑

$$Hom(X):=\{f:X\to X: f\text{是同胚}\}$$

并赋予它以“紧-开拓扑”，子拓扑基为

$$\mathcal{S}=\{M(K,U):K\text{是X的紧子集},U\text{是X中的开集}\},\text{其中}M(K,U)=\{f\in Hom(X):f(K)\subseteq U\}.$$

（1）证明：对任意紧集A和包含A的开集U，存在一个闭包紧的开集V，使得$A\subseteq V\subseteq\bar{V}\subseteq U$；

（2）证明复合映射是连续的：

$$c: Hom(X)\times Hom(X)\to Hom(X),\ \ (f,g)\mapsto g\circ f.$$

（3）证明：逆映射是连续的：

$$i: Hom(X)\to Hom(X),\ \ f\mapsto f^{-1}.$$

九、（10分）（此题比其它题目难很多）

设X是紧Hausdorff空间，证明：X是第二可数的，当且仅当$C(X\to\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty)$是第二可数的。