

中国科学技术大学  
2018-2019学年实分析期末考试

姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

要求: 请将所有的答案写在答题纸上。在每张答题纸上写上姓名和学号。

1. (15分) 写出测度、预测度的定义以及预测度构造测度的步骤。
2. (20分) 判断对错 (错误的给出反例, 正确的给出简要证明)。

(a) 设  $f$  在  $[a, b]$  上单调递增且几乎处处可微, 则

$$\int_{[a,b]} f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

(b) 设  $E$  为  $\mathbb{R}^n$  中的可测集, 则对几乎处处的  $x \in E$  有

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{m(B \cap E)}{m(B)} = 1$$

其中  $B$  为包含  $x$  的球。

3. (10分) 设  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . 计算:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x-n) \frac{x}{1+|x|} dx.$$

4. (15分) 设  $f$  和  $g$  是  $(0, 1)$  上的非负实值可测函数, 满足对任意的  $\alpha > 0$  都有  $m(\{x \in (0, 1) : f(x) > \alpha\}) = m(\{x \in (0, 1) : g(x) > \alpha\})$ . 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx.$$

5. (15分) 证明: 函数

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x = 0, \\ x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{if } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

在  $[0, 1]$  上不是有界变差的。

6. (15分) 设  $\mathbb{R}$  上实值函数  $f$  满足

$$|f(x) - f(y)| \leq e^{(|x|+|y|)|x-y|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明:  $f$  把每个零测集映为零测集。

7. (10分) 设  $E \subset \mathbb{R}$  可测,  $m(E) > 0$ . 令

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} \chi_E(tx) \chi_E(t) dt.$$

证明:  $f$  在  $x = 1$  处连续。