中国科学技术大学 2018-2019 学年第 2 学期
实分析 (H) 期末试题

整理: 邵锋 fshao99@gmail.com

1. (15 分) 下列说法是否正确 (证明或举反例): 存在严格单调增加函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\,dx = 0.$$

2. (15 分) 给出 Tonelli 定理在下列特殊情形的详细证明: 假设 K 是 $\mathbb{R}^2$ 中的紧子集, χ_K 是 K 上的特征函数, 则

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_K(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_K(x,y)\,dy \right) dx.$$

3. (15 分) 设 $L^2[0,2\pi]$ 是区间 $[0,2\pi]$ 上实值平方可积函数全体, 其内积定义为

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

(1) 写出 $L^2[0,2\pi]$ 的一组标准正交基.

(2) 证明: $\lim_{n\to\infty}\langle f(x), \sin(nx)\rangle = 0$.

4. (15 分) 假设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是单调增加函数, 而且对于所有 $x\in\mathbb{R}$, 下列极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

存在, 其值为实数或无穷. 利用 Vitali 覆盖引理证明

$$m\left(\{x\in\mathbb{R} : f'(x)=\infty\}\right) = 0.$$

5. (15 分) 假设对于所有的 $n\in\mathbb{N}$, 函数 f_n, f 是 $\mathbb{R}$ 上非负 Lebesgue 可积函数, 而且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x\in\mathbb{R};$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

6. (15 分) 假设 α, β 是正常数, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数满足

$$f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}, \quad x\in(0,1].$$

如果 $f\in BV[0,1]$, 证明 $f\in AC[0,1]$.(给出详细证明)

7. 假设 $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$, 计算全变差 $V_0^1 f$.