代数数论　2019 春

考试时间：**19:30 - 21:30** 。共 **9** 题，**1-6** 每题 **15** 分，**7-9** 每题 **20** 分，选取得分最高的 **6** 道题计入总得分。

1 (a) 对于每个数域 K, 求证判别式 $d(K) \equiv 0$ 或 $1(\bmod 4)$.

(b) 设 θ 是 $f(x) = x^3 + 5x + 4$ 的一个根, $K = \mathbb{Q}(\theta)$, 求证 $d(K) = -4 \cdot 233$.

2 设 K 为数域, $\mathcal{O}_K$ 为其整数环, $\alpha \in \mathcal{O}_K$. 求证:

(a) α 为环 $\mathcal{O}_K$ 中单位的充要条件是 $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm 1$.

(b) α 为单位根的充要条件是它的每个共轭元素的绝对值均是 1.

3 设 K 是 (E, p) 型 n 次数域. 求证对于每个 $\gamma \in \mathcal{O}_K$, 均有 $a \in \mathbb{Z}$, 使得 $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\gamma) \equiv a^n(\bmod p)$.

4 设 $K = \mathbb{Q}(\zeta_{11})$.

(a) 求证 K 有唯一的一个五次子域 M, 并证明 $M = \mathbb{Q}(\zeta_{11} + \zeta_{11}^{-1})$, 为其极大实子域.

(b) 求 $p = 2, 3, 5$ 在 M 中的分解情况.

(c) 求证素数 p 在 M 中完全分裂当且仅当 $p \equiv \pm 1(\bmod 11)$.

5 设 p 为素数并且 $p \equiv 5(\bmod 12)$, $p > 3^n$, 求证 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ 的类数 $\geq n$.

6 设素数 $p \equiv 1(\bmod 4)$, h 和 χ 分别为二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 的类数和二次特征. 令 $\epsilon > 1$ 为基本单位, $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$. 证明

$$\epsilon^{2h} = \prod_{a=1}^{p-1} (1 - \zeta_p^a)^{-\chi(a)}.$$

$= \mathrm{Res}_{s=1} \zeta_K(s)$

$L(1, \chi)$.

7 设 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{5})$,

(a) 计算 F 及其所有二次子域的类数.

(b) 证明 $\mathcal{O}_F^\times = \epsilon^{\mathbb{Z}} \times \mu_4$, 其中 ϵ 为基本单位 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8 设 p 为素数, ζ 为一本原 p 次单位根, $K = \mathbb{Q}(\zeta)$. 令 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{O}_K$ 中在 p 之上的唯一的素理想. 给定正整数 q, 令

$$S = \left\{\alpha \in K^\times / K^{\times q} \middle| \text{存在某个 } t \in \mathbb{Z}, \text{和分式理想 } \mathfrak{a}, \text{使得} (\alpha) = \mathfrak{p}^t \mathfrak{a}^q, \right\}.$$

证明存在作为 $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$-模的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_K[p^{-1}]^\times / \mathcal{O}_K[p^{-1}]^{\times q} \longrightarrow S \longrightarrow \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)[q] \longrightarrow 0,$$

假设 (x, y) 是卡特兰方程 $x^p - y^q = 1$ 的一个整数解, 证明 $x - \zeta$ 在 $K^\times / K^{\times q}$ 中的像落在 S 中.

9 设 L/K 是数域的扩张,

(a) 假设 L 不包含任意非平凡的 K 的 Abel 非分歧子扩张, 证明类数 h_K 整除 h_L.

(b) 如果 L/K 为 Galois 扩张并且 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 是一个 p-群 (p 为任一素数). 假设 K 中至多只有一个素位 (有限或无限) 在 L 中分歧, 证明如果 $p | h_L$ 则 $p | h_K$.

(c) 证明对任意的正整数 n, $p | h_{\mathbb{Q}(\mu_p)} \Leftrightarrow p | h_{\mathbb{Q}(\mu_{p^n})}$.