2019年春季学期近世代数测验I

1. （20分）令$E=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$F=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$S=\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}$，$T=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$。

   (1) 求 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 中所有与 E 乘法交换的矩阵。

   (2) 证明 E, F 在 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 中共轭，但在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中并不共轭。

   (3) 证明 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 由S, T生成。

   (4) 求 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的有限子群所有可能的阶。

2. （20分）记 $M_n(\mathbb{R})$ 为 n 阶实方阵全体形成的向量空间。

   (1) 证明映射 $\exp\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)=\sum\limits_{n\geq 0}\frac{A^n}{n!}$ 定义合理。

   (2) 证明 $E_A\colon \mathbb{R}\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $E_A(t)=\exp(tA)$ 为群同态。

   (3) 计算 $\exp(\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix})$.

   (4) 证明 $\exp(A)\in O_n \iff A$ 为反对称方阵。

3.（10分）令$G=\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 为复数域$\mathbb{C}$ 上n-阶可逆方阵的乘法群，P 为所有对角元均为1 的上三角方阵形成的子群。

   (1) 试求$C_G(P)$ 以及P 的中心$Z(P)$;

   (2) 试给出G 对于P 的左陪集的一个完全代表元系。

4.（10分）确定对称群 S_4 的所有正规子群，并计算自同构群 $\mathrm{Aut}(S_4)$。

5.（15分）设G为有限非交换群。

   (1) 令$N=|\{(x,y)\in G\times G \mid xy=yx\}|$ 以及$c(G)$ 为G 中元素的共轭类的个数，试证明$N=c(G)\cdot|G|$;

   (2) 证明$[G:Z(G)]\geq 4$;

   (3) 证明$c(G)\leq\frac{5}{8}|G|$，并举例说明等号可以取到。

6.（15分）设G为有限群，$N\lhd G$为正规子群。称G的子群H为N在G中的一个补，如果$H\cap N=1$且$G=NH$。

   (1) 证明若N在G中的补存在，则其所有在G中的补同构。

   (2) 设N在G中的一个补H为p-群（即阶为p的方幂），其中p为素数。证明G的任一希洛夫p-子群都包含N在G中的一个补。

   (3) 设N有平凡中心，且N的任一自同构f都是内自同构（即存在$g\in N$，使得$f(h)=ghg^{-1}$，$\forall h\in N$）。证明N在G中的补存在，并且存在N的唯一一个补H，使得$H\lhd G$。

7.（10分）确定所有互不同构的20阶群。

8.（10分）证明pqr 阶群非单群，其中p,q,r 为素数（不一定互不相同）。

2019年春季学期近世代数测验II

1. (15分) (1) 求群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 的阶. 9w9

   (2) 求群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{p^r})$ 的阶.

   (3) 求群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_{p^r})$ 的阶.

2. (10分) (1) 证明 $p|\#\{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{p^r})|X^p = 1\}$.

   (2) 证明对任意的 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{p^r})$，$\exists X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{p^r})$, $s.t.$ $X^{-1}AX \in T_n(\mathbb{Z}_{p^r})$.

3. (15分) (1) 证明整环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 是 欧几里得整环.

   (2) 找出 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 的所有素元.

   (3) 求 $x^2 + 2y^2 = 847$ 的所有整数解.

4. (10分) 利用中国剩余定理解同余方程组

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 6 \\ x &\equiv 3 \mod 7 \\ x &\equiv 4 \mod 8 \end{aligned}$$

5. (15分) 设 R 是含幺交换环

   (1) 证明下列等价:

   (i) R 是局部环，即 R 有唯一的极大理想.

   (ii) $\exists\,\mathfrak{m}$ 是 R 的真理想，并且对任意的 $x \in A - \mathfrak{m}$，x 均可逆.

   (iii) $\exists\,\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想，并且对任意的 $x \in \mathfrak{m}$，$1 + x$ 均可逆.

   (2)若 R 是整环，证明 $S^{-1}R$ 是局部环当且仅当 $S = R - \mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想.

6. (15分) 设 R 是 **Boolean 环**，即 $1 \in R$ 且对任意的 $a \in R$，有 $a^2 = a$.

   (1) 证明 R 是特征为 2 的交换环.

   (2) 证明 R 的素理想都是极大理想.

   (3) 证明 R 的有限生成理想是主理想.

7. (20分) 设 R 为含幺交换环，集合 $S \subseteq R$ 为乘法集，即满足条件

   (i) $0 \in R - S, 1 \in S$; (ii) 对 $x, y \in S$，则 $xy \in S$.

   定义

$$S^{-1}R = \{\tfrac{t}{s} \mid t \in R,\ s \in S\}/\sim.$$

$$\tfrac{t}{s} \sim \tfrac{t'}{s'} \Leftrightarrow \exists u \in S,\ s.t.\ ust' = uts'$$

$$\tfrac{t}{s} \cdot \tfrac{t'}{s'} = \tfrac{tt'}{ss'} \quad \tfrac{t}{s} + \tfrac{t'}{s'} = \tfrac{ts' + st'}{ss'}$$

这时有自然的环同态

$$\begin{aligned} \varphi_S : &R \to S^{-1}R \\ &a \mapsto \tfrac{a}{1} \end{aligned}$$

证明:

(1) $S^{-1}R$ 是环，称为 R 在 S 处的局部化，并描述 $\mathrm{Ker}\,\varphi_S$.

(2) $S^{-1}R$ 中的素理想必有 $S^{-1}\mathfrak{p}=\left\{\frac{m}{n}\mid m\in\mathfrak{p},\ n\in S\right\}$ 的形式，其中 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想.

(3) $\operatorname{Spec}S^{-1}R$ 与集合 $\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R\mid \mathfrak{p}\cap S=\emptyset\}$ 一一对应.

(4) 设 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想，$S=R-\mathfrak{p}$. 问何时 $R/\mathfrak{p}$ 同构于 $S^{-1}R/S^{-1}\mathfrak{p}$?

8. (10分) 设 R 是含幺交换环，令 $\sqrt{(0)}=\{x\in R|\ \exists n,\ s.t.\ x^n=0\}$，这是 R 的理想，称为**幂零根(nilradical)**，证明

$$\sqrt{(0)}=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}R}\mathfrak{p}$$

2019年春季学期近世代数测验III

1. (20分) 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 为首一整系数多项式。

(1) 证明若存在素数 p ，使得 $\bar{f}_p(x) = f(x) \bmod p$ 为 $\mathbb{F}_p[x]$ 中不可约多项式，则 $f(x)$ 为不可约多项式。

(2) 举例说明存在不可约的整系数多项式 $f(x)$ ，使得对任意素数 p ，$\bar{f}_p(x)$ 为 $\mathbb{F}_p[x]$ 中可约多项式。

(3) 判断 $x^4 + 2x + 4$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中是否可约，并给出理由。

(4) 设 M 为 $\mathbb{Z}[x]$ 的极大理想。试证明 M 必包含某个素数 p 。

2. (15分) 若复数 $a \in \mathbb{C}$ 是某个首一整系数多项式的根，则称 a 为一个代数整数。试分别找出 $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ 以及$\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$中所有的代数整数。

3. (15分) 设 $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ 为 n-次首一不可约多项式，其中 p 为素数，$n \geq 2$ 为正整数。

(1) 若 u 为 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}_p$ 的某个扩域E中的一个根，则 $f(x)$ 在 E 中有 n 个互不相同的根。

(2) 若 $f(x)$ 的一个根 u 为域 $F = \mathbb{F}_p(u)$ 的乘法群 $\mathbb{F}^\times$ 的生成元，则 $f(x)$ 所有根均为乘法群 $\mathbb{F}^\times$ 的生成元。此时称 $f(x)$ 为 $\mathbb{F}_p[x]$ 中的一个 n-次本元多项式。

(3) 求 $\mathbb{F}_p[x]$中 n 次本原多项式的个数

4. (15分) 设 F 为特征为素数 p 的域，$a \in F$，$f(x) = x^p - x - a \in F[x]$。

(1) 证明 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中可约当且仅当 $f(x)$ 在 F 中有根；

(2) 设 $x^p - x - a$ 在 $F[x]$ 中不可约，α 为 $f(x)$ 的一个根。证明 $F(\alpha)/F$ 为Galois扩张，并求Galois群 $\mathrm{Gal}(F(\alpha)/F)$。

5. (15分) 设 $\zeta = e^{2\pi i/9}$ 为9次本元单位根。试证明 $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ 为Galois扩张。求$G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$，并列出 G 的所有子群以及与之对应的中间域。

6. (20分) 设 E/F 为域的代数扩张，F 的特征为素数 p。称 $\alpha \in E$ 在 F 上纯不可分，是指 a 在 F 上的极小多项式在 F 闭包中只有唯一的一个根 α。若 E 中任意元素在 F 上均为纯不可分，则称 E/F 为纯不可分扩张。试证明下述命题等价。

(1) E/F 为纯不可分扩张；

(2) 任意 $a \in E$ 在 F 上极小多项式均有形式$x^{p^r} - a, a \in F$；

(3) 定义 $F^{1/p^n} = \{\alpha \in \bar{E} \mid \alpha^{p^n} \in F\}$，其中 $\bar{E}$ 为 E 的代数闭包，令 $F^{1/p^\infty} = \bigcup_{i\geq 1} F^{1/p^i}$，则 $E \subseteq F^{1/p^\infty}$；

(4) $\alpha \in E$，且 α 在 F 上可分 $\Longrightarrow \alpha \in F$；

(5) $E = F(S)$，其中 S 为E 的子集，且 S 中元素在 F 上纯不可分。

7. (10分) 试计算 $\mathrm{Gal}(F(x)/F)$，其中 F 为域，$F(x)$ 为 F 上一元有理函数域。