2019年秋季学期高等实分析期中考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2019年11月15日　主讲教师:赵立丰

本学期的教材是: Gerald B. Folland: Real Analysis.

1. ν是一个符号测度，证明：集合E是ν-null的，当且仅当$|\nu|(E)=0$.

2. 设$(X,\mathcal{M}),(Y,\mathcal{N})$是两个可测空间，$\mu$是$(X,\mathcal{M})$上的有限符号测度，$F:(X,\mathcal{M})\to(Y,\mathcal{N})$是可测映射。定义

$$(F_*\mu)(B)=\mu(F^{-1}(B)),\quad \forall B\in\mathcal{N}.$$

(1) 证明：$F_*\mu$是$(Y,\mathcal{N})$上的有限符号测度；

(2) 设$f:Y\to\mathbb{R}$上可测函数，且有$f\circ F$可积。证明：

$$\int f\ dF_*\mu=\int f\circ F\ d\mu.$$

3. (1) 设$1\le p\le r\le\infty$, 证明: L^p+L^r在赋予如下范数时是Banach空间.

$$\|f\|:=\inf\{\|g\|_{L^p}+\|h\|_{L^r}\big|f=g+h,\ g\in L^p,\ h\in L^r\}$$

(2)若$p<q<r$, 证明：嵌入映射$L^q\hookrightarrow L^p+L^r$是连续的。

4. 设μ,ν是可测空间$(X,\mathcal{M})$上的有限正测度, $\lambda=\mu+\nu$.

(1) 证明：存在$g\in L^2(\lambda)$, 使得对任意$f\in L^2(\lambda)$都有下式成立：

$$\int f\ d\nu=\int fg\ d\lambda.$$

由此可得对任意$f\in L^2(\lambda)$成立下式：

$$\int f(1-g)\ d\nu=\int fg\ d\mu;$$

(2) 证明: $0\le g\le 1$, a.e.;

(3) 令$A=\{x|g(x)<1\},\ B=\{x|g(x)=1\}$. 设$\nu_a(E):=\nu(A\cap E),\ \nu_s(E):=\nu(B\cap E)$. 证明: $\nu_a<<\mu,\ \nu_s\perp\mu$.

5. 设$1<p,q,r<\infty$满足$1/p+1/q=(1/r)+1$, 求证：

$$\|f*g\|_{L^r}\lesssim_{p,q}\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{q,\infty}}.$$