

2019年中国科学技术大学新生入学考试

数学学科

2019年8月24日

一、填空题

1. 正整数 $k =$ _____时, $\frac{2^k}{k!(2019-k)!}$ 最大.
2. 函数 $g(x) =$ _____时, 其图像与 $f(x) = x^2 - 1$ 的图像关于直线 $x + y = 1$ 对称.
3. 设 $\triangle ABC$ 满足 $\cos B + \cos C = 2 \cos A$, 则 $\cos A$ 取值范围是_____.
4. 设双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ 上两点 A, B 处的切线均通过点 $(1, 2)$, 则 AB 的方程是_____.
5. 从1-2019中任选两个正整数, 其和 ≤ 2019 的概率为_____.
6. 参数曲线
$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cos t \\ y = \sqrt{3} \sin t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$
 的极坐标方程是_____.

二、解答题

7. 设 \mathbb{R}^3 的原点为 O , 现有 A, B, C, D 四点构成四面体 $D-ABC$, 且满足 $|OA| = |OB| = |OC| = 1, |OD| = 2$, 并且四个向量两两之间的夹角都相等, 记作 θ . 求证: $\cos \theta = -\frac{1}{3}$. 并计算四面体 $D-ABC$ 的体积.

8. 设正实数 a, b, c, d , 满足 $abc = 1, 1 < d < 2$, 证明不等式

$$\frac{1}{d} < \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} < \frac{2}{d}.$$

9. 设函数列 $\{f_n\}$ 满足: $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = x, f_n(x) = |f_{n-1}(x) - n|$. 求 $f_{2019}(x) = \frac{2019}{2}$ 实数解的个数.