2019年春季学期微分方程II期中考试

任课教师：张永兵

始终设$U \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$为有界连通开集，其边界$\partial U$光滑。总分120，满分100。

一、判断题（4×15分）：

1）Hölder空间$C^{1,\alpha}(\overline{U}), 0 < \alpha \leq 1$，为Banach空间。

2）Sobolev空间$W^{1,p}(U)$，$1 \leq p \leq \infty$，为Banach空间。

3）几乎处处可微的函数必然有1阶弱导数。

4）设$u \in W^{1,p}(U)$，$1 \leq p < \infty$，则存在$u_m \in C^\infty(\overline{U})$使得$u_m \to u$ in $W^{1,p}(U)$。

5）设$u \in W^{1,p}(U)$，$1 \leq p < \infty$，则存在$u_m \in C_0^\infty(U)$使得$u_m \to u$ in $W^{1,p}(U)$。

6）设$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，$1 \leq p < \infty$，则存在$u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$使得$u_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$。

7）设$u \in H^1(U)$，$n \geq 3$，则$u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(U)$。 $W^{1,2}(U)$.

8）设$u \in H^1(U)$，$n = 2$，则$u \in L^\infty(U)$。

9）设$u \in W^{1,n+1}(U)$，则存在U上的连续函数u^*使得$u^* = u, a.e.$

10）设$\{u_k\}_{k=1}^\infty$满足$u_k \in H^1(U)$并且无子列在$L^2(U)$中收敛，则$\{\|u_k\|_{H^1(U)}\}$无界。

11）设$u \in W^{1,p}(U), 1 \leq p < \infty$，则$u$的迹为零当且仅当$u \in W_0^{1,p}(U)$。

12）对任意U和$f \in H^{-1}(U)$，必存在唯一的$u \in H_0^1(U)$为$\triangle u - 3u = f$对应的齐次Dirichlet边值问题的弱解。

13）对任意U和$f \in H^{-1}(U)$，必存在唯一的$u \in H_0^1(U)$为$\triangle u = f$对应的齐次Dirichlet边值问题的弱解。

14）对任意U和$f \in H^{-1}(U)$，必存在唯一的$u \in H_0^1(U)$为$\triangle u + 2u = f$对应的齐次Dirichlet边值问题的弱解。

15）对任意U，$-\triangle u + \sum_{i=1}^n x^i u_i + \frac{n}{2} u = 0$对应的齐次Dirichlet边值问题存在弱解$u \in H_0^1(U)$当且仅当$-\triangle v - \sum_{i=1}^n x^i v_i - \frac{n}{2} v = 0$对应的齐次Dirichlet边值问题存在弱解$v \in H_0^1(U)$。

二（6 + 6分）

3 3

（1）设$u \in L^1_{loc}(U)$，给出其弱导数$D^\alpha u, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$的定义，并证明$D^\alpha u$若存在则必唯一。

3

（2）令$B_1 := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}, n \geq 3$，求证$B_1$上定义的函数$u(x) = |x|^{2-n}, (x \in B_1, x \neq 0)$的一阶弱导数$D_i u$。

3

三（8分）设$u \in H_0^1(U), v \in H^1(U)$。利用逼近方法证明$\int_U u D_i v dx = -\int_U D_i u v dx$。

四（6 + 10分）（1）设$u \in H^1(U)$满足$Du = 0$(a.e.)，证明u为常值函数(a.e)。

（2）证明存在与u无关的常数$\beta > 0$使得

$$\int_U |Du|^2 dx + \int_{\partial U} (Tu)^2 \geq \beta \|u\|^2_{H^1(U)}, \quad \forall u \in H^1(U),$$

其中Tu为u的迹。

四（6 + 6分）

（1）设$f \in L^2(U)$。对于$u \in H^1(U)$，合理定义如下边值问题的弱解，并论证弱解的存在性和唯一性（其中ν为单位外法向）

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{in } U \\ u + 3\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial U. \end{cases}$$

（2）设$f \in L^2(U)$。对于$u \in H_0^2(U)$，合理定义如下边值问题的弱解，并论证弱解的存在性和唯一性

$$\begin{cases} \triangle^2 u - 3\triangle u + 5u = f & \text{in } U \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial U. \end{cases}$$

五（12分）考虑边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\triangle u + b^i(x)u_i + c(x)u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

其中$b^i, c \in C^1(\overline{U}), f \in L^2(U)$。如果$u \in H^1(U)$使得

$$B[u,v] = \int_U (u_i v_i + b^i u_i v + cuv)dx = \int_U fv dx, \quad \forall v \in H^1(U),$$

则称u为该边值问题的弱解。请论证

（1）何时对任意$f \in L^2(U)$弱解存在唯一？

（2）什么情况下弱解不存在？