简答题1（1）

$$\Phi(x)=\frac{1}{4\pi|x|},\quad x\neq 0.$$

（2）

$$u(x)=-\int_{\mathbb{R}^3}\Phi(x-y)f(y)dy=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(y)}{4\pi|x-y|}dy.$$

2（1）

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi|y-x|}-\frac{1}{4\pi|y-\tilde{x}|},\quad x,y\in\partial\mathbb{R}^3_+,$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_3}=-\frac{1}{4\pi}[\frac{y_3-x_3}{|y-x|^3}-\frac{y_3+x_3}{|y-\tilde{x}|^3}].$$

（2）

$$u(x)=-\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}g(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}dS_y=\frac{x_3}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{g(y)}{|y-x|^3}dy.$$

3（1）

$$\Phi_t=\triangle\Phi=(-\frac{n}{2t}+\frac{|x|^2}{4t^2})\Phi(x,t).$$

（2）

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)g(y)dy=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}g(y)dy,\quad x\in\mathbb{R}^n,t>0.$$

题一解答：[1，5分] 令

$$u(t,x)=T(t)X(x)$$

由方程得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda,$$

对应固有值问题为

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X(0)=X(l)=0.\end{cases}$$

固有值问题的解为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,\quad n\geq 1.$$

[2，5分] 相应的，

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{an\pi t}{l}+D_n\sin\frac{an\pi t}{l},$$

通解为

$$u(t,x)=\sum_{n\geq 1}(C_n\cos\frac{an\pi t}{l}+D_n\sin\frac{an\pi t}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由$u_t(0,x)=0$可知$D_n=0$，因此通解为

$$u(t,x)=\sum_{n\geq 1} C_n \cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$ 3分

[3，5分]

$$u(0,x)=\begin{cases}\frac{h}{b}x, & 0\leq x\leq b;\\ \frac{h}{l-b}(l-x), & b\leq x\leq l.\end{cases}$$

$\sum_{n\geq 1} C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=u(0,x)$两边同乘以$\sin\frac{n\pi x}{l}$积分得

$$\frac{C_n l}{2}=\int_0^b \frac{h}{b}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_b^l \frac{h}{l-b}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$ 2分

即

$$\frac{C_n l}{2}=\frac{hl}{b(l-b)}(\frac{l}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi b}{l},$$

因此

$$u(t,x)=\frac{2hl^2}{b(l-b)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi b}{l}\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$ 3分

题二2. 定义设u_1,u_2为两个解，定义$w(t,x)=u_1-u_2$。则

$$\begin{cases}w_{tt}=a^2 w_{xx}, & t>0, x\in(0,l),\\ w(t,0)=w(t,l)=0,\\ w(0,x)=w_t(0,x)=0.\end{cases}$$ 2分

定义

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l (w_t^2+a^2 w_x^2)dx$$ 3分

则由$w(0,x)=0$得$w_x(0,x)=0$，以及$w_t(0,x)=0$，因此$E(0)=0$。 2分

由$w(t,0)=w(t,l)=0$，可知$w_t(t,0)=w_t(t,l)=0$。分部积分得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= \int_0^l (w_t w_{tt}+a^2 w_x w_{xt})dx\\ &= \int_0^l w_t(w_{tt}-a^2 w_{xx})dx+a^2(w_x w_t)_0^l\\ &= 0.\end{aligned}$$ 3分

因此$w\equiv 0$，解唯一。

题三解答：[1，5分] Laplace方程在球坐标下的轴对称边值问题：设轴对称函数$u=u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta)$满足$\triangle_3 u=0$，即

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})=0. \quad (1)$$

令$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，则分离变量得

$$\frac{r^2\triangle_3 u}{u}=\frac{(r^2R')'}{R}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}=0,$$

因此

$$\begin{cases}\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+\lambda\Theta=0,\\ (r^2R')'-\lambda R=0.\end{cases}$$

从而建立固有值问题

$$\begin{cases}\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+\lambda\Theta=0, & \theta\in(0,\pi)\\ |\Theta(0)|<\infty, & |\Theta(\pi)|<\infty.\end{cases}$$ 3分

【令$x=\cos\theta, y(x)=\Theta(\arccos x)$，则它等价于$\begin{cases}[(1-x^2)y']'+\lambda y=0, & -1<x<1,\\ |y(\pm1)|<\infty.\end{cases}$

其解为$\begin{cases}\lambda_n=n(n+1), & n=0,1,2,\cdots,\\ X_n(x)=P_n(x).\end{cases}$】当$\lambda_n=n(n+1)$时，有相应固有函数

$$\Theta_n(\theta)=P_n(\cos\theta), \quad n=0,1,2,\cdots$$ 2分

[2，5分] 对于λ_n求解相应的关于$R(r)$的方程（欧拉方程）

$$r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0$$

得到通解

$$R_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n-1}.$$

球内问题通解为

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nr^nP_n(\cos\theta).$$ 3分

$$P_0=1, \quad P_1(\cos\theta)=\cos\theta, \quad P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1).$$

$$(1+\cos\theta)^2=\frac{4}{3}+2\cos\theta+\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)$$

$$u=\frac{4}{3}+2r\cos\theta+r^2(\cos^2\theta-\frac{1}{3})=\frac{4}{3}+2z+z^2-\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2).$$ 2分

题四解答： [1，5分]

$$\begin{cases} \triangle_2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 \le r < 1, 0 < \theta < \pi, \\ u = y(10 - 12y^2), & \text{on } \partial U. \end{cases}$$

令$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$，代入方程得

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = 0,$$

2分

因此有固有值问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0, & \theta \in (0,\pi) \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0. \end{cases}$$

3分

以及

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0.$$

[2，5分] 因此

$$\Theta_n(\theta) = \sin n\theta, \quad \lambda_n = n^2, \quad n \ge 1.$$

相应有

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n},$$

2分

$B_n = 0$，通解为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\theta.$$

3分

[3，5分]

$$u|_{r=1} = \sin\theta(10 - 12\sin^2\theta).$$

设$u = A_1 r\sin\theta + A_2 r^2 \sin 2\theta + A_3 r^3 \sin 3\theta$，则

$$\begin{aligned} u|_{r=1} &= A_1\sin\theta + A_2\sin 2\theta + A_3\sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= A_1\sin\theta + A_2\sin 2\theta + A_3\sin\theta(3 - 4\sin^2\theta) \\ &= \sin\theta(10 - 12\sin^2\theta) \end{aligned}$$

2分

因此

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 3,$$

$$u = r\sin\theta + 3r^3\sin 3\theta = y + 3y(3x^2 - y^2).$$

3分

$10\sin\theta - 12r^3\sin 3\theta.$