2019秋季学期 微分方程I期末考试

考试时间：2020年1月14日 14:30-16:30

授课教师：张永兵

微分方程I(2020年1月14日)

共两页，考试时间两小时。参考公式见第二页。

一、简答题（只需结果，每小题5分，共30分）：

1、设$\Phi(x)=\Phi(|x|)$为$\mathbb{R}^3-\{0\}$上的调和函数，并且

$$\lim_{r:=|x|\to\infty}\Phi(x)=0,\quad \int_{\partial B_R(0)}\frac{\partial\Phi}{\partial r}dS=-1.$$

（1）给出$\Phi(x),x\in\mathbb{R}^3-\{0\}$具体表达式。

（2）设$f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$，给出$\Delta u=f$的一个有界解$u(x)$。

2、设$x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3_+,\tilde{x}=(x_1,x_2,-x_3)$，$g\in C_0^\infty(\partial\mathbb{R}^3_+)$。

（1）给出$\mathbb{R}^3_+$上拉普拉斯算子的Green函数$G(x,y)$以及$\frac{\partial G}{\partial y_3}$的表达式。

（2）给出$\begin{cases}\Delta u=0, & \text{in } \mathbb{R}^3_+\\ u=g, & \text{on } \partial\mathbb{R}^3_+\end{cases}$的一个解$u(x)$。

3、定义$\Phi(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},x\in\mathbb{R}^n,t>0$。

（1）分别计算$\frac{\partial\Phi}{\partial t}$与$\Delta_x\Phi$。

（2）给出初值问题$\begin{cases}u_t-\Delta_x u=0, & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty)\\ u=g, & \text{on } \mathbb{R}^n\times\{t=0\}\end{cases}$的一个解$u(x,t)$。

二（$15+10$分）、设a,b,h,l为正常数，并且$b<l$。

1、求如下初边值问题的解$u(t,x)$

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & t>0,0<x<l,\\ u(t,0)=u(t,l)=0,\\ u_t(0,x)=0,\\ u(0,x)=\begin{cases}\frac{h}{b}x, & 0\le x\le b;\\ \frac{h}{l-b}(l-x), & b\le x\le l.\end{cases}\end{cases}$$

2、利用能量方法证明如上初边值问题的解唯一。

三（10分）、设$u\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$。建立固有值问题，并利用固有值问题的解求解

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & \text{in } U:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2<1\},\\ u=(1+z)^2, & \text{on } \partial U.\end{cases}$$

四（15分）、设$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<1,y>0\}$，$u\in C^2(U)\cap C(\overline{U})$。

（1）求$\begin{cases}\Delta_2 u=u_{xx}+u_{yy}=0, & \text{in } U\\ u=0, & \text{on } \partial U\cap\{y=0\}\end{cases}$ 的通解。

（2）求解$\begin{cases}\Delta_2 u=u_{xx}+u_{yy}=0, & \text{in } U\\ u=y(10-12y^2), & \text{on } \partial U.\end{cases}$

五（20分）：

1、设$U\subset\mathbb{R}^n$为有界开集，$u\in C^\infty(\overline{U})$。

（1）设$\Delta u=0$，证明

$$\max_{\partial U}|Du|^2=\max_{\overline{U}}|Du|^2.$$

（2）设$\begin{cases}\Delta u=f, & \text{in } U\\ u=g, & \text{on } \partial U.\end{cases}$ 证明存在常数$C(U,n)>0$使得

$$\max_{\overline{U}}|u|\le C(U,n)(\max_{\overline{U}}|f|+\max_{\partial U}|g|).$$

2、设$u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为调和函数。记$\omega_n$为单位球体积。

（1）利用调和函数平均值公式证明

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)=\frac{1}{\omega_n R^n}\int_{B_R(x_0)}\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)dy.$$

（2）设$u\ge 0$。证明u为常值函数。

参考公式：

极坐标(r,θ)下，$\Delta_2 u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$

球坐标(r,θ,φ)下（其中$(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$），

$$\Delta_3 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Legendre多项式的Rodrigues公式：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\quad n\ge 0.$$

最大值原理：设$U\subset\mathbb{R}^n$为有界开集，$u\in C^2(\overline{U})$，$\Delta u\ge 0$ in U，则

$$\max_{\overline{U}}u=\max_{\partial U}u.$$