2019年秋季学期数学分析(A3)期末考试

主讲教师: 李思敏、左达峰　整理人: 付杰

2020年元月10日 8:30-10:30

一、计算题：需要写出具体的计算过程和引用的定理。

1. 设$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, 求$\int_0^{\pi} f(x)dx$.

2. 设$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2+xt}\, dt$, 求$f'(0)$.

3. 设$f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ 求f的傅立叶级数表示.

4. 设$b > a > 0$, 计算积分$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$.

5. 计算极限$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

二、已知$\phi(u) := \int_1^{+\infty} f(x,u)\, dx$在$[a,b]$上一致收敛，函数$f$在$[1,+\infty)\times[a,b]$上连续。证明：$\phi(u)$是连续函数。

三、设$0 < u < 2$, 问：反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^u} dx$何时条件收敛？何时绝对收敛？

四、(1) 计算: $\pi - x$在$[0,\pi]$上的正弦傅立叶级数.

(2) 计算: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$和$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(3) 问: (1)中的傅立叶级数在$(0,\pi)$上是否一致收敛？

五、令$\phi(u) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin ux}{1+x^2} dx$, 其中$u$是非负实数。问: u在什么范围内使得

(1) $\phi(u)$是连续的？

(2) $\phi(u)$具有连续的导数？

六、设$f_n(x) = \frac{x}{1+n^3x^3}$, $x \ge 0$.

(1) 证明：$n \to \infty$时，$f_n(x)$在$[0,\infty)$上一致收敛于0;

(2) 证明：$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 0$.

七、设α是无理数, 其小数部分记作$\{\alpha\}$.

(1) 对任意正整数k, 定义$P_k(x) := e^{2\pi ikx}$, 证明:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P_k(\{n\alpha\}) = 0.$$

(2) 设$f \in C[0,1]$, $f(0) = f(1)$. 证明:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{n\alpha\}) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$