一、(每小题10分)计算题(给出必要的计算步骤) 得分

1 求曲面$\mathbf{r}=(u\cos v, u\sin v, v)$在点$(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$处的切平面和法线方程.

2 计算映射$\mathbf{f}=(\cos(x^2+y^2),\sin(xy))^T$在点$(1,1)$处的Jacobi矩阵.

3 将函数$f(x,y)=e^{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)$在点$(1,1)$处泰勒展开到二次项.

二、(12分) 得分

设函数$y=y(x)$是由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数.

(1) 计算$\frac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 求出曲线$F(x,y)=0$是直线的充要条件(需说明理由).

三、(18分) 得分

设α是实数, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

(1) 证明：当且仅当$\alpha>1$时, $f(x,y)$在$(0,0)$处连续.

(2) 问当且仅当α取何值时, $f(x,y)$在$(0,0)$处可微(需说明理由)?

四、(10分) 10 得分

设函数$u=u(x,y,z)$是由方程$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1$所确定的隐函数,

其中a,b,c是实常数.证明: $|\mathrm{grad}\ u|^2=2\mathbf{r}\cdot\mathrm{grad}\ u$,

其中$\mathrm{grad}\ u=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})$, $\mathbf{r}=(x,y,z)$.

五、(10分) 得分

在区间$[0,1]$内用线性函数$ax+b$近似代替函数x^2, 使得平方误差

$\int_0^1|x^2-(ax+b)|^2dx$最小, 试确定函数$ax+b$.

六、(10分) 得分

设光滑封闭曲面S的方程为$F(x,y,z)=0$, 证明: S上任何两个相距最远点处的切平面互相平行，且垂直于这两点的连线.

七、(10分) 得分

设D是n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$中的有界闭集，映射$\mathbf{f}:D\to D$, 且映射$\mathbf{f}$满足:

对任意$\mathbf{x},\mathbf{y}\in D$, 有$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})\|=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. 证明: $\mathbf{f}(D)=D$.