中国科学技术大学2019－2020学年秋季学期
数学分析A1　期末考试A卷

考试时间：2020年1月10日上午8:30—10:30

姓名：________ 学号：__________ 得分：______

- $\mathbb{R}$表示全体实数集合, $\mathbb{N}$表示全体非负整数集合, $\mathbb{N}^*$表示全体正整数集合.

一、(20分) 直接写出如下各类积分的答案, 不要中间过程.　　得分

(a) $\int \sin^3 x \cos x \,\mathrm{d}x$　(b) $\int_0^1 x^{2020}\,\mathrm{d}x$　(c) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$　(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

二、(15分)　　得分

(a) 设f是有限闭区间$[a, b]$上的有界函数. 叙述f在$[a, b]$上黎曼可积的定义, 以及f在$[a, b]$上的黎曼积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$的定义.

(b) 叙述一个刻画有限闭区间$[a, b]$上函数f黎曼可积的充分必要条件, 并由之推导出$[a, b]$上的单调函数一定黎曼可积.

三、(15分)　　得分

(a) 设n为正整数, 设f在$\mathbb{R}$上有$(n+1)$阶导函数, 写出f的带Lagrange 余项的n次Maclaurin 展开式.

(b) 称级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$收敛, 是指部分和数列$\{S_n\}$收敛, 其中$S_n = a_1 + \cdots + a_n$. 证明: 对于任意实数x, 如下两个级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

分别收敛于$e^x - 1$, $\cos x - 1$.

四、(共18分) 计算题, 要求完整解答过程.　　得分

(1). 求不定积分$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.　(2). 计算$\int_0^{\pi/2} \cos^{100} x\,\mathrm{d}x$.

(3). 求使无穷积分$\int_2^{\infty} e^{ax} x^b (\ln x)^c \,\mathrm{d}x$收敛的所有实数三元组$(a, b, c)$.

五、(10分) 设$x \in [1, +\infty)$, 设$n \in \mathbb{N}^*$.

得分	

(a) 证明如下恒等式

$$\int_x^{+\infty} t^{-1}\, e^{x-t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, \mathrm{d}t.$$

(b) 设$u_{n-1}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. 证明级数$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$不收敛.

(c) 当x充分大时, 请问能适当取部分和$S_n(x) = \sum_{m=0}^{n} u_m(x)$来近似$\int_x^{+\infty} t^{-1}\, e^{x-t}\, \mathrm{d}t$吗? 说明理由.

六*、(8分)

得分	

设$\mathbb{R}$上的函数f有任意阶导数, 并且对于任意$k \in \mathbb{N}$, 存在$C_k > 0$使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(|x|^k\, |f(x)| + |f^{(k)}(x)| \right) \le C_k.$$

证明: 对于任意$k, \ell \in \mathbb{N}$, 存在$C_{k,\ell} > 0$使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| \le C_{k,\ell}.$$

七*、(14分)

得分	

设u, v为$\mathbb{R}$上的有界函数, 并且它们都只有有限个间断点, 再设u, v其中之一在一个有限区间外恒为零, 定义u与v的卷积为

$$u * v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x-y) v(y)\, \mathrm{d}y.$$

(a) 证明: $u * v$在$\mathbb{R}$上一致连续.

(b) 设$a > 0$, 如下定义$\mathbb{R}$上的函数$H_a(x)$: 当$0 < x < a$时$H_a(x) = 1/a$, 在其他地方$H_a(x)$恒为0. 设k为大于1的整数, 设$a_0 \ge a_1 \ge \cdots \ge a_k$为正数. 证明:

$$u_k(x) := H_{a_0} * H_{a_1} * \cdots * H_{a_k}(x)$$

具有$(k-1)$阶连续导数, 并且任给$1 \le j \le k-1$, 成立估计

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| u_k^{(j)}(x) \right| \le \frac{2^j}{a_0 a_1 \cdots a_j}.$$

2020年1月数学分析A1期末考试简要解答

一. 每问5分. 答案依次为

$$\frac{\sin^4 x}{4} + C, \quad \frac{1}{2021}, \quad 2, \quad \pi.$$

二. (a) 写出黎曼可积的定义得5分, 写出黎曼积分的定义得1分.

(b) 写出Lebesgue 定理得5分. 由于$[a, b]$上的单调函数有界(2分), 并且只有至多可数个间断点(2分), 由Lebesgue 定理得到可积性质.

三. (a) 5分.

(b) 两小问各5分, 写出两个函数的带Lagrange或者Cauchy余项的Maclaurin 展开式各得3分, 固定x, 当展开式阶数趋于无穷时, 余项趋于零(2分).

四. (1-3)各6分, 过程正确但结果错误扣两分.

(1), (2)的答案依次为

$$\frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{7/3} - 3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4/3} + C, \quad \frac{(99)!!}{(100)!!}\frac{\pi}{2}.$$

(3) 所求的三元数组(a, b, c)全体构成如下集合

$$\mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}^2 \bigcup \{0\} \times \mathbb{R}_{<-1} \times \mathbb{R} \bigcup \{(0, -1)\} \times \mathbb{R}_{<-1}.$$

五. (a). 利用分部积分以及归纳法或者递推得证(4分).

(b) 由于$\lim_{n\to\infty} |u_{n-1}(x)| = +\infty$, 则级数发散(2分).

(c) 分析合理即可得4分. 记$f(x) = \int_x^\infty t^{-1}e^{x-t}\,\mathrm{d}t$. 那么当$x \geq 2n$ 时, 我们有

$$|f(x) - S_n(x)| = (n+1)!\int_x^\infty \frac{e^{x-t}\,\mathrm{d}t}{t^{n+2}} \leq (n+1)!\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+2}} = \frac{n!}{x^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}n^2}.$$

所以当$x >> 1$时, 取$n = [x/2]$, 那么$S_n(x)$可以很好地近似$f(x)$.

六. 观察到, 可以约化为证明: 对于任意$k \in \mathbb{N}^*$, 存在$D_k > 0$, 对于任意绝对值大于2的数$x \in \mathbb{R}$, 成立

$$|x|^k |f'(x)| \leq D_k. \qquad (\star) \tag{1}$$

(4分) 任给$\epsilon > 0$, 由Taylor定理, 存在$\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x+\epsilon) - f(x) = f'(x)\epsilon + \frac{1}{2}f''(x+\theta\epsilon)\epsilon^2.$$

于是, 我们有

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+\epsilon)| + |f(x)|}{\epsilon} + \frac{1}{2}|f''(x+\theta\epsilon)|\epsilon.$$

将$\epsilon = 1/|x|^k$代入上式, 并利用已知条件, 得到

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le \frac{C_2}{2}|x|^{-k} + |x|^{-k}\cdot|x|^{2k}\big(|f(x)| + |f(x+|x|^{-k})|\big) \\ &\le \frac{C_2}{2}|x|^{-k} + C_{2k}|x|^{-k} + |x|^{-k}\cdot(2|x+|x|^{-k}|)^{2k}|f(x+|x|^{-k})| \\ &\le \big(C_2/2 + (2^{2k}+1)C_{2k}\big)|x|^{-k}. \end{aligned}$$

取$D_k = C_2/2 + (2^{2k}+1)C_{2k}$, 即证($\star$). (4分)

七. (a)一共6分, 可以分三个步骤证明.

(a1) 由于$u*v = v*u$, 所以可不妨设u在一个有限区间外等于零, 设$M = \sup_{x\in\mathbb{R}}(|v|+1)$. (2分).

(a2) 设u连续, 那么u在$\mathbb{R}$上一致连续. 由之以及v有界, 可以证明$u*v$一致连续. 事实上, 任取x, y, 我们有

$$|u*v(x) - u*v(y)| = \left|\int \big(u(x-t) - u(y-t)\big)v(t)\,\mathrm{d}t\right| \le M\int |u(x-t) - u(y-t)|\,\mathrm{d}t.$$

再由u一致连续并且在一个有限区间外为零, 即证$u*v$一致连续.

(a3) 任取$\epsilon > 0$, 设$M = \sup_{x\in\mathbb{R}}(|v|+1)$. 模仿习题6.5.2的证明, 可以取得$\tilde{u}\in C_0^0(\mathbb{R})$:

$$\int |u-\tilde{u}| < \frac{\epsilon}{4M}.$$

再由三角不等式, 得到

$$\begin{aligned} |u*v(x) - u*v(y)| &\le |(u-\tilde{u})*v(x)| + |\tilde{u}*v(x) - \tilde{u}*v(y)| + |(\tilde{u}-u)*v(y)| \\ &\le 2M\int_{-\infty}^{\infty}|u-\tilde{u}| + |\tilde{u}*v(x) - \tilde{u}*v(y)|. \end{aligned}$$

再由(a1)以及上面的不等式即证$u*v$一致连续. (2分)

(b)一共8分. 可以分如下四个步骤证明.

(b1) 设$u\in C^0(\mathbb{R})$, 那么

$$u*H_a(x) = a^{-1}\int_0^a u(x-t)\mathrm{d}t = a^{-1}\int_{x-a}^{x} u(t)\,\mathrm{d}t$$

属于C^1, 其导函数为$\big(u(x) - u(x-a)\big)/a$. 因此, 若$u\in C^k$, 那么$u*H_a\in C^{k+1}$. (2 分)

(b2) 直接计算知道$H_{a_0}*H_{a_1}(x)$在区间$[0,\, a_0+a_1]$之外等于零, 并且在$[0,\, a_1]$的斜率为$1/(a_0a_1)$, 在$[a_1,\, a_0]$为常数, 在$[a_0,\, a_0+a_1]$线性单调下降到零. 从而$H_{a_0}*H_{a_1}$连续且在一个有限区间之外等于零. 由(b1)以及递推得到$u_k(x) := H_{a_0}*\cdots*H_{a_{k-2}}*\big(H_{a_{k-1}}*H_{a_k}\big)(x)\in C^{k-1}$. (2分)

(b3) 任给$a > 0$, 定义将函数映成函数的平移算子τ_a为$(\tau_a u)(x) = u(x-a)$. 那么由(b1), 如果$u\in C^0(\mathbb{R})$, 那么$(u*H_a)' = \frac{1-\tau_a}{a}(u)$, 其中"1"表示恒等算子. 于是我们得到当$j\le k-1$ 时,

$$u_k^{(j)} = \left(\prod_{i=0}^{j-1}\frac{1-\tau_{a_i}}{a_i}\right)(H_{a_j}*\cdots H_{a_k}).$$

上式中的乘积符号$\prod$表示算子们$\frac{1-\tau_{a_i}}{a_i}$的复合, 由于$\tau_a\tau_b = \tau_b\tau_a$, 我们不必在意它们的先后次序. (2 分)

(b4) 设u, v满足(a)的条件, 并且u, v都在一个有限区间外等于零, $w \in C^0(\mathbb{R})$, 那么成立$(u * v) * w = u * (v * w)$. 令$w = 1$得

$$\int u * v = \int u \cdot \int v.$$

由以上两式, 我们得到

$$|u_k^{(j)}(x)| \leq \frac{2^j}{a_0 \cdots a_{j-1}} \sup |H_{a_j} * \cdots H_{a_k}| \leq \frac{2^j}{a_0 \cdots a_{j-1} a_j} \int H_{a_{j+1}} * \cdots * H_{a_k} = \frac{2^j}{a_0 \cdots a_j}.$$

(2分)