线性代数 A1 期中考试

2019 年 4 月 30 日 9:45—11:45

姓名 ____________ 学号 ________________________ 得分 ____________

一、填空题．每空 5 分，共 50 分．答案需化简，填在试卷上．

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^TA=\begin{pmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{pmatrix}$，$A^k=\begin{pmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $(k\in\mathbb{N})$．

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$，则 $\det(A)=$____________，$A^{-1}=\begin{pmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{pmatrix}$．

3. 设 $A=\begin{pmatrix}I_n&I_n&O\\I_n&O&I_n\\O&I_n&I_n\end{pmatrix}$，则 $\det(A)=$____________，$A^{-1}=\begin{pmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{pmatrix}$．

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，则 $\operatorname{rank}(A)=$____________，$\operatorname{rank}(A^*)=$____________，
   A 在 $\mathbb{Z}^{3\times 3}$ 中的 Smith 标准形为________________________．

5. 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times p}$, $B\in\mathbb{F}^{m\times p}$．矩阵方程 $XA=B$ 有唯一解 $X\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 的充分必要条件是________________________．

二、解答题．第 6-7 题各 12 分，第 8-9 题各 13 分，共 50 分．需给出详细解答过程．

6. 求解 $\mathbb{C}$ 上的线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=a^2\\x_1+ax_2+x_3=a\\x_1+x_2+a^2x_3=1\end{cases}$，其中 $a\in\mathbb{C}$．

7. 设 n 阶整数方阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&&\\-1&0&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&-1&0\end{pmatrix}$，其中空白处元素都是 0．
   证明：A 是可逆方阵当且仅当 n 是偶数，并求 A^{-1}．

8. 证明：对任意方阵 A，存在单位下三角方阵 L 和置换方阵 P，使得 LPA 是上三角．

9. 证明：任意对称实数方阵 A 有 $r=\operatorname{rank}(A)$ 阶可逆主子矩阵．

参考答案

一、 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&k&-C_k^2\\0&1&-k\\0&0&1\end{pmatrix}$，$-4$，$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-2&3\\-2&4&-2\\3&-2&1\end{pmatrix}$，$(-2)^n$，$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I&I&-I\\I&-I&I\\-I&I&I\end{pmatrix}$，

2，1，$\mathrm{diag}(1,3,0)$，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A)=n$

6. 方程组系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a^2\end{pmatrix}$，$\det(A)=(a-1)^2(a+1)$. (3 分)

   当 $a\neq\pm1$ 时，A 可逆，方程组有唯一解 $x=(1+a+a^2,-a,-1)$. (3 分)

   当 $a=1$ 时，方程组化为 $x_1+x_2+x_3=1$，解得 $x=(1-s-t,s,t)$. (3 分)

   当 $a=-1$ 时，方程组化为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1-x_2+x_3=-1\end{cases}$，解得 $x=(-t,1,t)$. (3 分)

7. 根据 Laplace 展开定理，$\det(A)=\Delta_n=\Delta_{n-2}=\cdots=\begin{cases}1, & 2\mid n;\\0, & 2\nmid n.\end{cases}$ (4 分)

   $A^{-1}=\Big(A_{ji}\Big)=\Big((-1)^{i+j}M_{ji}\Big)$，$M_{ji}=\begin{cases}\Delta_{i-1}\Delta_{n-j}, & i\leqslant j;\\(-1)^{i-j}\Delta_{j-1}\Delta_{n-i}, & i\geqslant j.\end{cases}$ (4 分)

   $A_{ji}=\begin{cases}-1, & i \text{ 是奇数，} j \text{ 是偶数，} i<j;\\1, & i \text{ 是偶数，} j \text{ 是奇数，} i>j;\\0, & \text{其它.}\end{cases}$ (4 分)

8. 对 A 的阶数 n 归纳．当 $n=1$ 时，结论显然成立．当 $n\geqslant2$ 时，存在单位下三角方阵 $L_1=\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}\\ *&I_{n-1}\end{pmatrix}$ 和置换方阵 P_1，使得 $L_1P_1A=\begin{pmatrix}*&*\\ \mathbf{0}&B\end{pmatrix}$. (5 分)

   根据归纳假设，存在单位下三角方阵 L_2 和置换方阵 P_2 使得 L_2P_2B 是上三角．

   记 $\widetilde{L}_2=\mathrm{diag}(1,L_2)$，$\widetilde{P}_2=\mathrm{diag}(1,P_2)$，$U=\widetilde{L}_2\widetilde{P}_2L_1P_1A$ 是上三角． (3 分)

   注意到 $\widetilde{L}_1=\widetilde{P}_2L_1\widetilde{P}_2^{-1}$ 也是单位下三角．因此，$U=LPA$，其中 $L=\widetilde{L}_2\widetilde{L}_1$ 是单位下三角方阵，$P=\widetilde{P}_2P_1$ 是置换方阵． (5 分)

9. $A=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}B&C\\O&O\end{pmatrix}P^T$，其中 P,Q 是可逆方阵． (4 分)

   $A^T=A\Rightarrow C=O\Rightarrow\det(B)\neq0$. (3 分)

   设 $P_1=P\begin{pmatrix}I_r\\O\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{rank}(P_1)=r$，存在子矩阵 $P_2=P_1\left[\begin{smallmatrix}i_1&\cdots&i_r\\1&\cdots&r\end{smallmatrix}\right]$ 可逆． (3 分)

   故 $A=P_1BP_1^T$，主子矩阵 $A\left[\begin{smallmatrix}i_1&\cdots&i_r\\i_1&\cdots&i_r\end{smallmatrix}\right]=P_2BP_2^T$ 可逆． (3 分)