《实用随机过程》期中考试试题 100

(2019-11-11)

16 1. (16 分) 一个盒子中 $n+m$ 个小球，其中 n 个红球, m 个黑球. 现依次不放回地从盒子中取球，以 X 记在首次取得黑球前取出的红球个数. 求 $\mathrm{E}X$.

36 2. (36 分) 一个商店在上午 8:00 开门, 下午 5:00 关门. 从 8:00 到 10:00 顾客以每小时 4 人 速率到达, 从 10:00 到 12:00 顾客以每小时 8 人 速率到达, 从 12:00 到下午 2:00 顾客到达率稳定地从 12:00 的每小时 8 人增加到下午 2:00 的每小时 10 人，而在下午 2:00 到 5:00 顾客到达率稳定地从下午 2:00 的每小时 10 人下降到下午 5:00 的每小时 4 人.

(1) 问顾客的到达规律可以用什么样的概率模型来描述? (要求详细描述该模型)

(2) 求上午 8:30 到 9:00 之间没有顾客到达的概率.

(3) 求上午 8:30 到 9:30 之间有 3 位顾客到达，而下午 1:30 至 2:30 之间有 6 位顾客到达的概率.

(4) 求这家商店平均每天到达的顾客数.

(5) 已知某天上午 8:00 到 12:00 之间有 20 位顾客到达，求该天下午 1:00 至 2:00 之间有 10 位顾客到达的概率.

(6) 假定每位到达的顾客以概率 0.6 为男性, 以概率 0.4 为女性. 求某天上午 8:00 到 10:00 之间有 5 位男顾客到达，且上午 10:00 至 12:00 之间有 10 位女顾客到达的概率.

14 3. (14 分) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列，共同分布为参数 λ 的指数分布，N 为几何分布随机变量，独立于 $\{X_n, n \geq 1\}$，其中$\mathrm{P}(N=n) = p(1-p)^{n-1}$, $n \geq 1$. 试基于 Poisson 过程的相关理论求 $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ 的分布.

14 4. (14 分) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度 $\lambda = 10$ 的齐次 Poisson 过程，以 S_i 记该过程的第 i 个事件发生时刻，求 $\mathrm{E}[S_i | N(t) = n]$.

20 5. (20 分) 观察一列独立同分布的离散随机变量 $W_1, W_2, \ldots$, 等待花样 “010101” 的发生. 设

$$\mathrm{P}(W_1 = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(W_1 = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(W_1 = 2) = \mathrm{P}(W_1 = 3) = \frac{1}{8},$$

求等待花样 “010101” 首次发生所需要的期望时间.

problem 1: n红 m黑

sol 1: 对第一个球的颜色取条件:

$$E_{n,m} = E(X) \quad (n红, m黑的情况)$$

$$E_{n,m} = E(X|第一个为黑)P(第一个为黑) + E(X)|第\cdots红)P(\cdots红)$$

$$= \frac{n}{n+m}(1+E_{n-1,m}) \quad \cdots\cdots \quad 6'$$

$$E_{1,m} = \frac{1}{m+1}$$

算 $E_{2m} = \frac{2}{m+2}\left(1+\frac{1}{m+1}\right) = \frac{2}{\cancel{m+2}\ m+1}$

$E_{3m} = \frac{3}{m+3}\left(1+\frac{2}{m+2}\right) = \frac{3}{\cancel{m+3}\ m+1}$

猜 $E_{n,m} = \frac{n}{\cancel{n+m}\ m+1}$ $\cdots\cdots$ 10'

归猜证之 $\cdots\cdots$ 16'

So2: 给 n 个红球编号. 1, 2, ⋯ n.

$$I_k = \begin{cases} 1 & 红球 k 在所有黑球之前 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X = \sum_{k=1}^{n} I_k \quad \cdots\cdots \quad 6$$

I_k 同分布 [redacted]

$P(I_k=1) =$ [redacted] $= \frac{(m+2)\cdots(m+n)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} = \frac{1}{m+1}$ (插空)

$E(X) = \frac{n}{m+1}$ $\cdots\cdots$ 16

Remark：暴力做法写出了表达式最多给6分

problem 4:

$i \le n$ (7')　$i > n$ (7')

$i \le n$: $S_i \mid N(t)=n \overset{d}{=} U_{i:n}$ --- 2

$$\therefore E(S_i \mid N(t)=n) = E(U_{i:n})$$
$$= \int_0^t x \cancel{\ } \left(\frac{x}{t}\right)^{i-1} \left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-i} \cdot \frac{1}{t}\,dx \cdot \binom{n}{1}\binom{n-1}{i-1}$$

---- 4

$$= t \int_0^1 u^i (1-u)^{n-i}\,du \cdot \frac{n!t}{(n-i)!(i-1)!}$$

$$= B(i+1, n-i+1) \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} t = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} t = \frac{it}{n+1}$$

---- 7'

$i > n$:

$S_i \mid N(t)=n \overset{d}{=} t + S_{i-n}$ （无记忆性） --- 3

$$E(S_{i-n}) = E(X_1 + \cdots + X_{i-n}) = (i-n)E(X) = \frac{i-n}{\lambda}$$

$$\therefore E(S_i \mid N(t)=n) = t + {}^{i-n}/_{10}$$ ---- 7'

problem 5:

$$E_{010101} = E_{01} + E_{0101|01} + E_{010101|0101}$$

$$\overset{\text{Blackwell}}{=} (pq)^{-1} + (pq)^{-2} + (pq)^{-3}$$

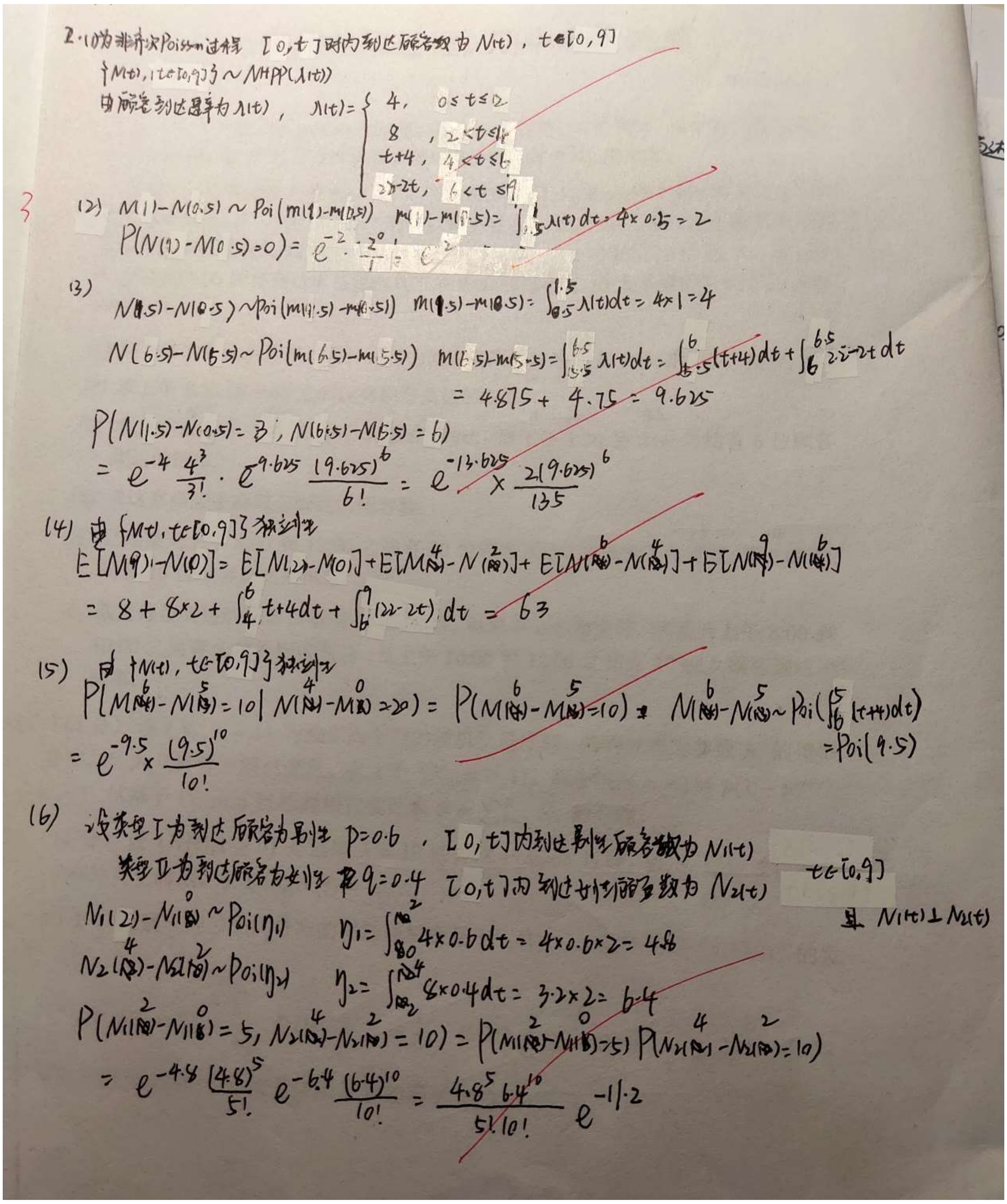
$$= 8 + 64 + 512$$

$$= 584$$

remark：部分同学答案算错了，扣3-5分。

第二题评分标准：

本题 36 分，每问 6 分，第一小问指出非齐次泊松过程两分，每阶段的λ(t)各一分，第二小问算对得六分，其他情况酌情给分但不超过两分，第三小问只算出一个得两分，第四小问算出前两阶段的到达均值得两分，第五小问算对得六分，其他情况酌情给分但不超过两分，第六小问只算出一个得两分。



2.(1) 为非齐次Poisson过程 $[0,t]$ 时内到达顾客数为 $N(t)$，$t\in[0,9]$

$\{N(t), t\in[0,9]\} \sim NHPP(\lambda(t))$

由顾客到达速率为 $\lambda(t)$，$\lambda(t)=\begin{cases} 4, & 0\le t\le 2 \\ 8, & 2<t\le 4 \\ t+4, & 4<t\le 6 \\ 22-2t, & 6<t\le 9 \end{cases}$

3

(2) $N(1)-N(0.5)\sim Poi(m(1)-m(0.5))$　$m(1)-m(0.5)=\int_{0.5}^{1}\lambda(t)dt=4\times 0.5=2$

$P(N(1)-N(0.5)=0)=e^{-2}\cdot\frac{2^0}{1!}=e^{-2}$

(3) $N(1.5)-N(0.5)\sim Poi(m(1.5)-m(0.5))$　$m(1.5)-m(0.5)=\int_{0.5}^{1.5}\lambda(t)dt=4\times 1=4$

$N(6.5)-N(5.5)\sim Poi(m(6.5)-m(5.5))$　$m(6.5)-m(5.5)=\int_{5.5}^{6.5}\lambda(t)dt=\int_{5.5}^{6}(t+4)dt+\int_{6}^{6.5}22-2t\,dt$

$=4.875+4.75=9.625$

$P(N(1.5)-N(0.5)=3, N(6.5)-N(5.5)=6)$

$=e^{-4}\frac{4^3}{3!}\cdot e^{-9.625}\frac{(9.625)^6}{6!}=e^{-13.625}\times\frac{2(9.625)^6}{135}$

(4) 由 $\{N(t), t\in[0,9]\}$ 独立增量

$E[N(9)-N(0)]=E[N(2)-N(0)]+E[N(4)-N(2)]+E[N(6)-N(4)]+E[N(9)-N(6)]$

$=8+8\times 2+\int_4^6 t+4\,dt+\int_6^9(22-2t)\,dt=63$

(5) 由 $\{N(t), t\in[0,9]\}$ 独立增量

$P[N(6)-N(5)=10 \mid N(4)-N(0)=20]=P(N(6)-N(5)=10)$　$N(6)-N(5)\sim Poi(\int_5^6(t+4)dt)$

$=Poi(9.5)$

$=e^{-9.5}\times\frac{(9.5)^{10}}{10!}$

(6) 设类型I为到达顾客为男性 $p=0.6$，$[0,t]$ 内到达男性顾客数为 $N_1(t)$

类型II为到达顾客为女性 $q=0.4$　$[0,t]$ 内到达女性顾客数为 $N_2(t)$　$t\in[0,9]$

且 $N_1(t)\perp N_2(t)$

$N_1(2)-N_1(0)\sim Poi(\eta_1)$　$\eta_1=\int_0^2 4\times 0.6\,dt=4\times 0.6\times 2=4.8$

$N_2(4)-N_2(2)\sim Poi(\eta_2)$　$\eta_2=\int_2^4 8\times 0.4\,dt=3.2\times 2=6.4$

$P(N_1(2)-N_1(0)=5, N_2(4)-N_2(2)=10)=P(N_1(2)-N_1(0)=5)P(N_2(4)-N_2(2)=10)$

$=e^{-4.8}\frac{(4.8)^5}{5!}e^{-6.4}\frac{(6.4)^{10}}{10!}=\frac{4.8^5\,6.4^{10}}{5!\,10!}e^{-11.2}$

第三题评分标准：

本题 14 分，采用分类泊松过程的做法得到答案满分，取条件于 N 计算得到答案 8 分，其他情况酌情给分但不超过 4 分。

3. 该过程可看作元件受到冲击，冲击间隔 $\{X_n, n\geq 1\} \sim Exp(\lambda)$

每次冲击以 p 的概率会损坏，设元件损坏时总冲击数为 N，$P(N=n)=(1-p)^{n-1}p$

$S=\sum_{k=1}^{N} X_k$ 为元件损坏~~时~~的时刻，$[0,t]$ 内冲击数 $N(t)\sim Poi(\lambda t)$

设类型I为造成损坏的冲击，概率为 p，$S_n^{(1)}$ 为第 n 个I类事件发生时间，$X_n^{(1)}$ 为I类事件发生间隔。

$N_1(t)$ 为 $[0,t]$ I类事件发生个数。

类型II为：未造成损坏的冲击数

则 $N_1(t)\sim Poi(\lambda p t)$　$X_n^{(1)}\sim Exp(\lambda p)$　$n\geq 1$，且 $S=S_1^{(1)}$

$$P(S\leq s)=P(S_1^{(1)}\leq s)=P(X_1^{(1)}\leq s)=1-e^{-\lambda p s}$$

$S\sim Exp(\lambda p)$