

2019-2020 学年第一学期期终考试试题

考试科目: 线性代数 B1 考试时间: 2020.01.14

学生所在系: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_  
学号: \_\_\_\_\_ 得分: \_\_\_\_\_

一. 填空题 (每题 4 分, 共 24 分)

1. 设三维向量  $\alpha, \beta$  满足  $\alpha^T \beta = 2$ . 则  $\beta \alpha^T$  的特征值为 \_\_\_\_\_.

2. 设 4 阶矩阵  $A$  与  $B$  相似,  $I$  为单位矩阵. 若矩阵  $A$  的特征值为 1, 2, 3, 4, 则行列式  $|B^{-1} - I| =$  \_\_\_\_\_.

3. 已知矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

相似. 则  $a + b =$  \_\_\_\_\_.

4. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_.

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

且  $A$  的秩为 2. 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

6. 设三阶矩阵  $A = (a_{ij})$  满足  $A^* = A^T$ , 且  $a_{11} = a_{12} = a_{13}$ . 则  $a_{11} =$  \_\_\_\_\_.

二. 判断题 (每题 5 分, 共 20 分)

1. 下列两矩阵是否相似? 是否相合? 说明理由.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  的矩阵,  $AB = I$ , 其中  $I$  为  $m$  阶单位矩阵. 则秩  $(A)$  是否一定等于秩  $(B)$ ? 说明理由.

3. 设  $a_{ij} = \frac{i}{j}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . 二次型  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)^2$  的符号差是否为  $n$ ? 说明理由.

4. 设方阵  $A$  的每行元素之和都为 1. 那么  $A^5$  的每行元素之和是否为 1? 说明理由.

三. 计算及证明题 (共 56 分)

1. (8 分) 设 3 阶实对称正交矩阵  $A$  非负定,  $|A| = -1$ , 且  $(1, 1, 1)^T$  为对应于特征值  $-1$  的特征向量. 求  $A$ .

2.(8分) 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\alpha = (3, -1, 2)^T$ . 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |A^n \alpha|$ . 这里  $|\cdot|$  表示向量的长度.

- 3.(8分) 设  $T$  是  $n$  维线性空间  $V$  的线性变换,  $n > 1$ ,  $\alpha \in V$ . 设  $T^n \alpha = 0$ , 但是  $T^{n-1} \alpha \neq 0$ .
- (1) 求证: 向量组  $\alpha, T\alpha, \dots, T^{n-1}\alpha$  线性无关.
  - (2) 求证:  $T$  不能对角化.

4.(6分) 设  $K$  为集合  $\{c_1 + c_2x + c_3 \cos x : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$  在通常的函数加法和数乘下构成的线性空间. 定义内积  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ . 从  $1, x, \cos x$  出发, 构造  $K$  的一个标准正交基.

5.(8分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{pmatrix}.$$

证明: 当  $|x| < 3$  时,  $|A| < 10^5$ .

6.(8分) 设  $t$  为参数. 讨论以下二次曲面的类型:  $x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3 - 10 = 0$ .

7.(10分) 设  $K$  是次数小于 3 的实系数多项式在通常的数乘及加法运算下构成的线性空间.

(1) 证明  $1, x+2, x^2+x+3$  是  $K$  的一个基;

(2) 求线性变换

$$Tf := f'' - f$$

在这个基底下的矩阵;

(3) 求  $T$  的特征向量.