中国科学技术大学
2019–2020学年泛函分析期末考试

姓名：________________ 学号：________________

注意：前 7 题为可选题，可从中任选 5 题作答（多答以得分最高 5 题计入总分），8、9 两题为必答题．所有题目的解答要有详细过程，用到的定理需要注明．

1. （15分）证明：有限维赋范空间的对偶空间一定是有限维的．

2. （15分）证明：Hilbert 空间是自反的．

3. （15分）设 $C[0,1]$ 上的算子 A 定义为 $(Au)(t) := \sqrt{2}\,u(t)$, $t \in [0,1]$. 证明：A 不是紧算子．

4. （15分）证明：弱 * 收敛的序列一定有界．

5. （15分）设 P 是 Hilbert 空间 H 上的一个有界算子，满足 $P^2 = P^* = P$. 证明：P 的值域 $\mathrm{Ran}(P)$ 是闭的，且 P 是 H 到 $\mathrm{Ran}(P)$ 上的正交投影．

6. （15分）设 $T : \ell^2 \to \ell^2$ 是如下定义的线性算子

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) := \left(x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \dots\right).$$

求 $\sigma(T)$ 和 $\sigma_p(T)$.

7. （15分）证明：一个 Hilbert 空间为有限维的当且仅当它的任一规范正交基都是它的线性基 (即代数基, Hamel 基).

8. （15分）设 X, Y 是两个 Banach 空间，X 是有限维的．$T : X \to Y$ 是线性算子．证明：

   (i) T 是闭值域算子；

   (ii) T 有界；

   (iii) $\exists x \in X$, $\|x\| = 1$ s.t. $\|Tx\| = \|T\|$.

9. （10分）设 X, Y 是赋范空间，且X非{0}，证明：当且仅当 Y 是 Banach 空间时 $\mathcal{L}(X,Y)$ 是 Banach 空间．

装订线 答题时不要超过此线