2019年秋季学期泛函分析(H)期末考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2020年元月6日 14:30-17:20 主讲教师: 黄文

1、（10分）考虑复Hilbert空间l^2的子集

$$C = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2 : |x_n| \le \frac{1}{n},\ \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

证明：若$T : C \to C$连续，则T在C上必有一个不动点。

2、（15分）设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$是Hilbert空间$H$中的两个规范正交基。定义算子$T$如下:

$$T(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \sigma_n,\ \ \forall x \in H.$$

证明：T是H到自身的线性等距满射，且$T(0) = 0$. 进一步地，证明每个$H \to H$且把0映射到0的线性等距满射均可以由以上方式得到。

3、（15分）求证：$L^4[0,1]$中的非空子集A有界，当且仅当：对A中的任何序列$\{f_n\}$，必存在子列$\{f_{n_k}\}$和函数$f \in L^4[0,1]$使得

$$\int_0^1 f_{n_k}(t)g(t) \to \int_0^1 f(t)g(t)dt.\ \ \forall g \in L^{4/3}[0,1].$$

4、（20分）

(1) 设A, B是复Banach空间X上的有界线性算子。求证：若$A-B$是紧算子，则有$\sigma(A) \backslash \sigma_p(A) \subset \sigma(B)$ 和 $\sigma(B) \backslash \sigma_p(B) \subset \sigma(A)$.

(2) 在复Hilbert空间l^2上定义如下算子：

$$T : (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (\frac{x_1}{2}, \frac{4x_1 + x_2}{3}, \frac{5x_2 + x_3}{4}, \cdots, \frac{(n+2)x_{n-1} + x_n}{n+1}, \cdots).$$

求T的谱集$\sigma(T)$和谱半径$r_\sigma(T)$.

5、（15分）证明：存在连续线性泛函$f \in (l^\infty)^*$, 使得对任意$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots) \in l^\infty$, 都有如下两条性质成立:

- $\liminf_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) \le f(\vec{a}) \le \limsup_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1})$;
- $f(a_1, a_2, \cdots) = f(a_2, a_3, \cdots)$.

6、（15分）设X是Banach空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. 证明以下两条是等价的：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty,\ \ \forall f \in X^*$;

(2) 存在$C > 0$使得对任意正整数N和$\epsilon_n \in \{\pm 1\},\ 1 \le n \le N$, 都有$\| \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n x_n \| \le C$成立。

7、（10分）设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是是Hilbert空间H中的一个规范正交基，$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - \sigma_n\|^2 < \infty,$$

且$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$在如下意义下线性无关：即没有$\sigma_n$会落在其它$\sigma_k (k \neq n)$张成的线性子空间的闭包$\overline{Span\{\sigma_k : k \neq n\}}$中。求证：$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$是$H$的一组Schauder基。