中国科学技术大学

2019–2020学年微分流形期末考试试题

姓名　　　　　　　　　　学号：

要求：请将所有的答案写在答题纸上。在每张答题纸上写上姓名和学号。

1. （20分）利用外微分形式统一数学分析中的Newton-Leibniz公式、Green公式、Gauss公式、Stokes公式.

2. （20分）设$\omega = x^2dx + y^2dy - dz$ 是$\mathbb{R}^3$上的1-形式.

   (a) 给出$\omega = 0$ 所确定的分布 L 的一组基向量场.

   (b) 求上述分布L 过$(0,0,1)$ 点的积分曲面.　$\frac{1}{1+u^2+v^2}$

3. （20分）设 $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (x,y,z) = \cancel{\frac{1}{u^2+v^2}}(2u, 2v, 1-(u^2+v^2))$, $\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. 求 $F^*\omega$.

(10分)利用局部单参数变换群写出微分流形上向量场Lie导数的定义并给出其几何解释.

5. （12分）证明集合$G := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^1x^4 - x^2x^3 = 1\}$是Lie群.

(6分) 设 $\omega = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)dx^k \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$满足 $d\omega = 0$. 求 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$使得 $df = \omega$.

7. （6分）设G 为Lie群, $\mathfrak{g}$为其Lie代数, $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$为 G的伴随表示.

   (a) 写出$\mathfrak{g}$上Lie括号的定义;

   (b) 判断对任意的 $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $g \in G$是否有 $[Ad(g)\xi, Ad(g)\eta] = Ad(g)[\xi,\eta]$, 并说明理由。

8. (6分) 设G 为Lie群, $\dim G = r$, $\widetilde{\omega}_k (1 \le k \le r)$是 G上处处线性无关的左不变1-形式, 光滑映射$\sigma : G \longrightarrow G$ 满足: 对任意的 k有$\sigma^*\widetilde{\omega}_k = \widetilde{\omega}_k$. 利用Frobenius可积性定理证明:存在 $g \in G$使得 $\sigma = L_g$.