中国科学技术大学微分几何期中考试

2019 年 11 月 9 日

1. (20分) 设 $S: \vec{r} = \vec{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))^T$, $(u,v) \in D$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑参数曲面。其中, D 为 $\mathbb{R}^2$ 上的的单连通区域。计算曲面 S 的 Gauss 曲率和平均曲率。

2. (20分) 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的参数曲面 $S: \vec{r} = \vec{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))^T$, $u, v \in (-\pi/2, \pi/2)$. 其中, $f(u,v) = \log\cos(u) - \log\cos(v)$.

(i) 计算曲面 S 的第一基本形式和第二基本形式。

(ii) 证明 S 是极小曲面。

3. (15分) 设 $C: \vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in [c,d] \subset (a,b)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的正则光滑曲线, 其中 s 为弧长参数。记 $\vec{t}(s) = \vec{r}\,'(s)$, 并记 $\vec{n}(s)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上由 $\vec{t}(s)$ 逆时针旋转 $\pi/2$ 得到的向量。我们知道:

$$\vec{t}\,'(s) = \kappa(s)\,\vec{n}(s).$$

其中, $\kappa(s)$ 为平面曲线 C 的曲率。如下定义函数 $\theta = \theta(s)$, $s \in [c,d]$:

$$\theta(s) = \int_c^s \kappa(u)\,du.$$

试证: $\forall s_1, s_2 \in [c,d]$,

$$\big(\vec{t}(s_2), \vec{n}(s_2)\big) = \big(\vec{t}(s_1), \vec{n}(s_1)\big)\begin{pmatrix}\cos\big(\theta(s_2)-\theta(s_1)\big) & -\sin\big(\theta(s_2)-\theta(s_1)\big)\\ \sin\big(\theta(s_2)-\theta(s_1)\big) & \cos\big(\theta(s_2)-\theta(s_1)\big)\end{pmatrix}.$$

4. (15分) 设 $C: \vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in (a,b)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的正则光滑曲线, 其中 s 为弧长参数。记 $\kappa(s)$, $\tau(s)$ 为 C 的曲率和挠率。假定 C 落在某个半径为 R 的球面上并且 $\tau(s)$ 处处非零。(i) 试证 $\kappa(s)$ 处处非零。(ii) 试证 $\frac{\kappa}{\tau}\frac{d}{ds}\big(\frac{1}{\kappa^2\tau}\frac{d\kappa}{ds}\big)$ 为常数, 并求出这个常数。

5. (30分) 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的正则光滑曲线 $C: \vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$, $u \in (u_0, u_1)$. 这里, u 为弧长参数。记 $\kappa(u)$ 为曲线 C 的曲率。假定 $\forall u \in (u_0, u_1)$ 有 $0 < \kappa(u) < 1/a$, 其中 a 是一个正实数。记 $\vec{N} = \vec{N}(u)$ 和 $\vec{B} = \vec{B}(u)$ 为曲线 C 的主法向量和副法向量。考察参数曲面

$$S: \vec{r} = \vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + a\vec{N}(u)\cos v + a\vec{B}(u)\sin v, \quad u \in (u_0, u_1),\ v \in (0, 2\pi).$$

(i) 证明: S 为正则曲面。

(ii) 判断 $\vec{r}_u(u,v)$ 和 $\vec{r}_v(u,v)$ 是否为 S 在点 $\vec{r}(u,v)$ 处的主方向, 并说明理由。

(iii) 当 $\vec{\rho}$ 为平面曲线时, 求曲面 S 的主曲率、平均曲率, 并判断该曲面是否为极小曲面。

$\tau=0$, 有解吗