期中考试答案及评分标准

微分几何

2019 年秋　刘世平教授

整理人：常芸凡

November 16, 2019

1

(20 分) 设 $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)=(u,v,f(u,v))^T,(u,v)\in D$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑参数曲面。其中 D 为 $\mathbb{R}^3$ 上的单连通区域。计算曲面 S 的 Gauss 曲率和平均曲率。

Proof. 计算可知

$$\mathbf{r}_u=(1,0,f_u),\mathbf{r}_v=(0,1,f_v),\mathbf{n}=\frac{(-f_u,-f_v,1)}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$$

$$\mathbf{r}_{uu}=(0,0,f_{uu}),\mathbf{r}_{uv}=(0,0,f_{uv}),\mathbf{r}_{vv}=(0,0,f_{vv})$$

从而得出第一基本量：

$$\begin{aligned}E&=<\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_u>=1+f_u^2\\F&=<\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v>=f_uf_v\\G&=<\mathbf{r}_v,\mathbf{r}_v>=1+f_v^2\dots\dots\dots(5')\end{aligned}$$

第二基本量：

$$\begin{aligned}L&=<\mathbf{r}_{uu},\mathbf{n}>=\frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\\M&=<\mathbf{r}_{uv},\mathbf{n}>=\frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\\N&=<\mathbf{r}_{vv},\mathbf{n}>=\frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\dots\dots\dots(5')\end{aligned}$$

Gauss 曲率为：

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}\dots\dots\dots(5')$$

平均曲率为：

$$H=\frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}=\frac{f_{uu}(1+f_v^2)+f_{vv}(1+f_u^2)-2f_{uv}f_uf_v}{2(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}}\dots\dots\dots(5')$$

□

其中平均曲率 H 少 1/2 的扣 1 分。

2

(20 分) 考虑 $\mathbb{R}^3$ **中的参数曲面** $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))^T, (u, v) \in (-\pi/2, \pi/2)$**.**
其中，$f(u, v) = \ln\cos(u) - \ln\cos(v)$**.**

(i) **计算曲面** S **的第一基本形式和第二基本形式。**

(ii) **证明** S **是极小曲面。**

Proof. (i) $(8')$

带入 1 中的计算可得：

$$
\begin{aligned}
&E = 1 + f_u^2 = \frac{1}{\cos^2 u};\\
&F = f_u f_v = -\tan u \tan v;\\
&G = 1 + f_v^2 = \frac{1}{\cos^2 v};\\
&L = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = -\frac{1}{\cos^2 u}\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 u + \tan^2 v}};\\
&M = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = 0;\\
&N = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = \frac{1}{\cos^2 v}\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 u + \tan^2 v}}
\end{aligned}
$$

于是第一基本形式为：

$$
\mathbf{I} = \frac{1}{\cos^2 u} dudu - 2\tan u \tan v dudv + \frac{1}{\cos^2 v} dvdv \ldots\ldots\ldots (4')
$$

第二基本形式为：

$$
\mathbf{II} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 u + \tan^2 v}}\left(-\frac{1}{\cos^2 u} dudu + \frac{1}{\cos^2 v} dvdv\right) \ldots\ldots\ldots (4')
$$

(ii) $(12')$

$$
\begin{aligned}
H =& \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}\\
=& \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 u + \tan^2 v}(EG - F^2)}\left(-\frac{1}{\cos^2 u}\frac{1}{\cos^2 v} + \frac{1}{\cos^2 v}\frac{1}{\cos^2 u}\right)\\
=& 0 \ldots\ldots\ldots (12')
\end{aligned}
$$

□

3

(15 分) 设 $C : \vec{r} = \vec{r}(s), s \in [c, d] \subset (a, b)$ **为** $\mathbb{R}^2$ **中的正则光滑曲线，其中 s 为弧长参数。记** $\vec{t}(s) = \dot{\vec{r}}(s)$**，并记** $\vec{n}(s)$ **为** $\mathbb{R}^2$ **上由** $\vec{t}(s)$ **逆时针旋转** $\pi/2$ **得到的向量。我们知道：**

$$
\dot{\vec{t}}(s) = \kappa(s)\vec{n}(s).
$$

其中，$\kappa(s)$ 为平面曲线 C 的曲率。定义如下函数 $\theta=\theta(s), s\in[c,d]$:

$$\theta(s)=\int_c^s \kappa(u)du.$$

试证明：$\forall s_1, s_2\in[c,d]$,

$$(\vec{t}(s_2),\vec{n}(s_2))=(\vec{t}(s_1),\vec{n}(s_1))\begin{pmatrix}\cos(\theta(s_2)-\theta(s_1)) & -\sin(\theta(s_2)-\theta(s_1))\\ \sin(\theta(s_2)-\theta(s_1)) & \cos(\theta(s_2)-\theta(s_1))\end{pmatrix}.$$

Proof. 记 $(\vec{x}(s_2),\vec{y}(s_2))=(\vec{t}(s_1),\vec{n}(s_1))\begin{pmatrix}\cos(\theta(s_2)-\theta(s_1)) & -\sin(\theta(s_2)-\theta(s_1))\\ \sin(\theta(s_2)-\theta(s_1)) & \cos(\theta(s_2)-\theta(s_1))\end{pmatrix}$.

对 s_2 求导有：

$$\begin{aligned}\frac{d(\vec{x}(s_2),\vec{y}(s_2))}{ds_2}=&(\vec{t}(s_1),\vec{n}(s_1))\begin{pmatrix}-\sin(\theta(s_2)-\theta(s_1))\dot\theta(s_2) & -\cos(\theta(s_2)-\theta(s_1))\dot\theta(s_2)\\ \cos(\theta(s_2)-\theta(s_1))\dot\theta(s_2) & -\sin(\theta(s_2)-\theta(s_1))\dot\theta(s_2)\end{pmatrix}\\ =&(\vec{t}(s_1),\vec{n}(s_1))\begin{pmatrix}\cos(\theta(s_2)-\theta(s_1)) & -\sin(\theta(s_2)-\theta(s_1))\\ \sin(\theta(s_2)-\theta(s_1)) & \cos(\theta(s_2)-\theta(s_1))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\kappa(s_2)\\ \kappa(s_2) & 0\end{pmatrix}\\ =&(\vec{x}(s_2),\vec{y}(s_2))\begin{pmatrix}0 & -\kappa(s_2)\\ \kappa(s_2) & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

且 $(\vec{x}(s_2),\vec{y}(s_2))\mid_{s_2=s_1}=(\vec{t}(s_1),\vec{n}(s_1))$
由微分方程解的唯一性，知

$$(\vec{x}(s_2),\vec{y}(s_2))=(\vec{t}(s_2),\vec{n}(s_2))$$

ps.(除解方程和利用常微分方程存在唯一性等方法。知道要证明 θ 是旋转角度 3 分，标架方程 3 分，剩余过程 9 分酌情给分，所有作不严谨的近似不可以作为证明。) □

4

(15 分) $C:\vec{r}=\vec{r}(s), s\in(a,b)$ **为** $\mathbb{R}^3$ **中的正则光滑曲线，其中 s 为弧长参数。记** $\kappa(s),\tau(s)$ **为曲线** C **的曲率和挠率。假定** C **落在某个半径为 R 的球面上并且** $\tau(s)$ **处处非零。**

(i) **证明：**$\kappa(s)$ **处处非零。**

(ii) **试证** $\frac{\kappa}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa^2\tau}\frac{d\kappa}{ds})$ **为常数，并求出这个常数。**

Proof. (i) $(5')$

由 $\vec{r}=\vec{r}(s)$ 落在半径为 R 的球面上知，存在 $\vec{r}_0$ 使得

$$<\vec{r}(s)-\vec{r}_0,\vec{r}(s)-\vec{r}_0>=R^2\ \forall s\in(a,b)$$

求导可得

$$<\dot{\vec{r}},\vec{r}-\vec{r}_0>=0 \tag{4.1}$$

再求导可知：

$$<\ddot{\vec{r}},\vec{r}-\vec{r}_0>+<\dot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}>=0 \tag{4.2}$$

由 s 为弧长参数可知 $<\dot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}>=1$
而 $\ddot{\vec{r}}=\kappa(s)\vec{n}(s)$, 故由 (4.2) 可知，$\kappa(s)$ 处处非零。

(ii) $(10')$

对 (4.2) 求导有：

$$<\dddot{\vec{r}},\vec{r}-\vec{r}_0>+3<\ddot{r},\dot{r}>=0$$

也就是：

$$<\dddot{\vec{r}},\vec{r}-\vec{r}_0>=0 \tag{4.3}$$

从而

$$\begin{aligned}0=&<(\kappa(s)\vec{n}(s))',\vec{r}-\vec{r}_0>\\ =&<\dot{\kappa}(s)\vec{n}(s)+\kappa(s)(-\kappa(s)\vec{t}(s)+\tau(s)\vec{b}(s)),\vec{r}-\vec{r}_0>\\ \xlongequal{(4.1)}&<\dot{\kappa}(s)\vec{n}(s)+\kappa(s)\tau(s)\vec{b}(s),\vec{r}-\vec{r}_0>\end{aligned}$$

于是

$$<\dot{\kappa}(s)\vec{n}(s)+\kappa(s)\tau(s)\vec{b}(s),\vec{r}-\vec{r}_0>=0 \tag{4.4}$$

再对 (4.4) 求导可知

$$\begin{aligned}0=&<(\dot{\kappa}(s)\vec{n}(s)+\kappa(s)\tau(s)\vec{b}(s))',\vec{r}-\vec{r}_0>+<\kappa(s)\vec{n}(s)+\kappa(s)\tau(s)\vec{b}(s),\vec{t}(s)>\\ =&<(\dot{\kappa}(s)\vec{n}(s)+\kappa(s)\tau(s)\vec{b}(s))',\vec{r}-\vec{r}_0>\\ =&<(\ddot{\kappa}-\kappa\tau^2)\vec{n}+(2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau})\vec{b}-\dot{\kappa}\kappa\vec{t},\vec{r}-\vec{r}_0>\\ \xlongequal{(4.1)}&<(\ddot{\kappa}-\kappa\tau^2)\vec{n}+(2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau})\vec{b},\vec{r}-\vec{r}_0>\end{aligned}$$

从而

$$<(\ddot{\kappa}-\kappa\tau^2)\vec{n}+(2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau})\vec{b},\vec{r}-\vec{r}_0>=0 \tag{4.5}$$

结合 (4.1),(4.4),(4.5) 可知

$$\vec{t}(s),\dot{\kappa}(s)\vec{n}(s)+\kappa(s)\tau(s)\vec{b}(s),(\ddot{\kappa}-\kappa\tau^2)\vec{n}+(2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau})\vec{b}$$

均与 $\vec{r}-\vec{r}_0$ 垂直，故其应在同一个平面上，混合积为 0. 也就是

$$\begin{aligned}0=&<\vec{t}(s)\wedge(\dot{\kappa}(s)\vec{n}(s)+\kappa(s)\tau(s)\vec{b}(s),(\ddot{\kappa}-\kappa\tau^2)\vec{n}+(2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau})\vec{b}>\\ =&-\kappa\tau(\ddot{\kappa}-\kappa\tau^2)+\dot{\kappa}(2\dot{\kappa}\tau+\kappa\dot{\tau})\end{aligned} \tag{4.6}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa^2\tau}\frac{d\kappa}{ds})&=\frac{\ddot{\kappa}(\kappa^2\tau)-\dot{\kappa}(2\kappa\dot{\kappa}\tau+\kappa^2\dot{\tau})}{(\kappa^2\tau)^2}\\ &=\frac{\ddot{\kappa}\kappa\tau-2\dot{\kappa}^2\tau-\kappa\dot{\kappa}\dot{\tau}}{\kappa^3\tau^2}\end{aligned}$$

结合 (4.6) 可知，$\ddot{\kappa}\kappa\tau-2\dot{\kappa}^2\tau-\kappa\dot{\kappa}\dot{\tau}=\kappa^2\tau^3$

故 $\frac{\kappa}{\tau}\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa^2\tau}\frac{d\kappa}{ds})=1$

ps.(第一问我们知道 κ=0 的时候，不能定义标架，题目本身有些问题，基本都给了分，同样，所有称在附近为直线的这样的描述是不能作为证明的。第二问对球面曲线方程求导，并得到曲率挠率关系 3 分，过程正确 6 分，结果常数算出为 1 满分)

□

5

(30 分) 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的正则光滑曲线 $C:\vec{\rho}=\vec{\rho}(u),u\in(u_0,u_1)$. 这里，$u$ 为弧长参数。记 $\kappa(u)$ 为曲线 C 的曲率。假定 $\forall u\in(u_0,u_1)$，有 $0<\kappa(u)<1/a$, 其中 a 是一个正实数。记 $\vec{N}=\vec{N}(u)$ 和 $\vec{B}=\vec{B}(u)$ 为曲线 C 的主法向量和副法向量。考察参数曲面

$$S:\vec{r}=\vec{r}(u)=\vec{\rho}(u)+a\vec{N}(u)\cos v+a\vec{B}(u)\sin v,u\in(u_0,u_1),v\in(0,2\pi).$$

(i) **证明：S 为正则曲面。**

(ii) **判断 $\vec{r_u}(u,v)$ 和 $\vec{r_v}(u,v)$ 是否为 S 在点 (u,v) 处的主方向，并说明理由。**

(iii) **当 $\vec{\rho}$ 为平面曲线时，求曲面 S 的主曲率、平均曲率，并判断该曲面是否为极小曲面。**

Proof. (i) $(8')$

记 $\vec{T}(u)$ 为曲线 C 的切向量。则

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u=&\mathbf{T}(u)+a(-\kappa(u)\mathbf{T}(u)+\tau(u)\mathbf{B}(u))\cos v+a(-\tau(u)\mathbf{N}(u))\sin v\\ =&(1-a\kappa(u)\cos v)\mathbf{T}(u)-a\tau(u)\sin v\mathbf{N}(u)+a\tau(u)\cos v\mathbf{B}(u)\dots\dots\dots(2')\\ \mathbf{r}_v=&-a\mathbf{N}(u)\sin v+a\mathbf{B}(u)\cos v\dots\dots\dots(2')\end{aligned}$$

从而 $\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=-a(1-a\kappa(u)\cos v)(\cos v\mathbf{N}(u)+\sin v\mathbf{B}(u)),v\in(0,2\pi)\dots\dots\dots(2')$

由 $\kappa(u)<1/a$ 可知 $\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v\neq 0\dots\dots\dots(2')$

从而 S 为正则曲面 (可微性显然)。

ps.(凡得出 $\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v\neq 0$ 的均可得 8 分, 未得出者按步骤给分)

(ii) $(12')$

$\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v|}=-\cos v\mathbf{N}(u)-\sin v\mathbf{B}(u)\dots\dots\dots(1')$

从而可知：

$$\begin{aligned}-\mathbf{n}_u=&-\kappa(u)\cos v\mathbf{T}(u)+\tau(u)\cos v\mathbf{B}(u)-\tau(u)\sin v\mathbf{N}(u)\dots\dots\dots(1')\\ -\mathbf{n}_v=&\frac{1}{a}\mathbf{r}_v\dots\dots\dots(1')\end{aligned}$$

于是 $\mathcal{W}(r_v)=-\mathbf{n}_v=\frac{1}{a}\mathbf{r}_v$，可得 r_v 为主方向 $\dots\dots\dots(1')$

ps.(凡得出 r_v 为主方向的均可以得到上述 4 分, 未得出者按步骤给分)

下面来考察 $\mathbf{r}_u$:

$\mathbf{n}_u$ 为主方向 $\Leftrightarrow\exists\lambda(u,v)s.t.\mathcal{W}(r_u)=-\mathbf{n}_u=\lambda\mathbf{r}_u$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases}\lambda(1-a\kappa(u)\cos v)=-\kappa(u)\cos v\\ -a\lambda\tau(u)\sin v=-\tau(u)\sin v\\ a\lambda\tau(u)\cos v=\tau(u)\cos v\end{cases}\tag{5.1}$$

情形 1：

在 (u,v) 处有 $\tau(u)=0$, 则

$$\lambda=\frac{\kappa(u)\cos v}{a\kappa(u)\cos v-1}$$

此时 r_u 为主方向 $\dots\dots\dots(4')$

情形 2：

在 (u,v) 处有 $\tau(u)\neq 0$ 则 $\lambda=1/a$(由式 (5.1) 的 2，3 两式)，

再代入 1 式可得 $\frac{1}{a}=-\dfrac{\kappa(u)\cos v}{1-a\kappa(u)\cos v}\Leftrightarrow\frac{1}{a}=0$ 这是不可能的。

从而此时 r_u 不为主方向 $\dots\dots\dots(4')$

ps.(凡是用 $<r_u,r_v>=0$ 判断主方向的：得出 $\tau=0$ 时，r_u,r_v 为主方向得 4 分；认为 $<r_u,r_v>\neq 0$ 得出 r_u,r_v 均非主方向的不得分。此外按步骤给分)

(iii) $(10')$

此时 $\tau(u)=0$, 对应情形 $1\dots\dots\dots(2')$

ps.(第二问没有算对的同学，得出第一、第二基本量得 2 分)

从而主曲率为 $-\dfrac{\kappa(u)\cos v}{1-a\kappa(u)\cos v},\frac{1}{a}\dots\dots\dots(4')$

平均曲率为：

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{\kappa(u)\cos v}{1-a\kappa(u)\cos v}\right)\dots\dots\dots(2')$$

而 $H=0\Leftrightarrow\cos v=\dfrac{1}{2a\kappa(u)},\forall(u,v)$

这是不可能的，故非极小曲面 $\dots\dots\dots(2')$

$\square$