中国科学技术大学微分几何期末考试

2020 年 1 月 13 日

姓名 ____________ 学号 ____________ 学院 ____________

注 1：回忆三维欧氏空间中二维曲面在正交参数系下的高斯方程如下。设 $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的正则光滑曲面，(u,v) 为正交参数系。如果 S 的第一、第二基本形式分别

$$\mathrm{I} = E\,du\,du + G\,dv\,dv\,,\qquad \mathrm{II} = L\,du\,du + 2M\,du\,dv + N\,dv\,dv\,,$$

则如下方程成立：

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right\} = \frac{LN-M^2}{EG}.$$

注 2：本试卷共四个大题，满分 120 分 (含 20 分附加题)。试卷与答题纸一起上交。

一. 设 $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的正则光滑曲面。已知其第一基本形式为

$$ds^2 = du\,du + (u-v)^2\,dv\,dv\,.$$

这里, $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,|\,u>v\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的一个区域。求 S 的高斯曲率。(5分)

二. 考察欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面

$$S^2 := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

回顾到由球极投影给出的 $S^2-\{(0,0,1)\}$ 的参数化为

$$x = \frac{2u}{1+u^2+v^2},\quad y = \frac{2v}{1+u^2+v^2},\quad z = \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}.$$

i) 计算 $S^2-\{(0,0,1)\}$ 在 (u,v) 参数下的第一基本形式和高斯曲率。(15分)

ii) 记南极点 $(0,0,-1)$ 为 P. 取 P 处的长度为 $2\pi/3$、且方向与东经 117° 经线 (方向与 z 增大方向一致）在 P 点的切向量同向的 S^2 的切向量 $\vec{v}$. 求点 $\exp_P(\vec{v})$ 的经纬度。(5分)

iii) 试判断 $S^2-\{(0,0,1)\}$ 上是否存在光滑的单位切向量场。如有请构造，如没有请详述理由。(10分)

iv) 试判断 $S^2-\{(0,0,1)\}$ 上是否存在沿 $S^2-\{(0,0,1)\}$ 上任意光滑曲线均平行的非零光滑切向量场。如有请构造，如没有请详述理由。(附加题 10分)

三. 考虑正则曲面片

$$S: \vec{r}=\vec{r}(u,v)=\big(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\big), \quad u\in(-\infty,+\infty), v\in(-\pi,\pi).$$

其中，$f,g:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ 均为光滑函数，满足 $f>0$, $g'>0$, $f'^2+g'^2=1$.

i) 设 $C: u=u(s), v=v(s)$ 是 S 上的一条光滑测地线，其中 s 为弧长参数。证明 $\left\langle \frac{d\vec{r}(u(s),v(s))}{ds}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u(s),v(s))\right\rangle$ 是与 s 无关的常数。(10分)

ii) 设 $v_0\in(-\pi,\pi)$ 为一固定值，求 u-曲线 $\vec{r}=\vec{r}(u,v_0)$, $u\in(-\infty,+\infty)$ 的测地曲率。设 $u_0\in(-\infty,+\infty)$ 为一固定值，求 v-曲线 $\vec{r}=\vec{r}(u_0,v)$, $v\in(-\pi,\pi)$ 的测地曲率。(10分)

iii) 设 $u_0\in(-\infty,+\infty)$ 为一固定值。考虑有向曲线 $C_{u_0}:\vec{r}=\vec{r}(u_0,v)$, $v\in(0,\pi/2)$.（方向为参数增大方向。）求积分

$$\int_{C_{u_0}} k_g\, ds\,,$$

这里 k_g 为 C_{u_0} 的测地曲率，s 为 C_{u_0} 的弧长参数。(5分)

iv) 判断切向量 $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ 是否为 Weingarten 变换的特征向量并说明理由。(10分)

v) 求 $\int_{\vec{r}(D)} K\,dA$. 其中，$D:=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,|\,u\in(0,1), v\in(0,\pi/2)\}$, K 为 S 的高斯曲率，dA 为面积元。(10分)

四. 设 $C:\vec{r}_0=\vec{r}_0(s)$, $s\geq 0$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一条以 s 为弧长参数的正则光滑闭曲线，满足

$$\forall s\geq 0,\quad \vec{r}_0(s) = \vec{r}_0(s+L).$$

这里，L 是一个正的常数。考虑由如下偏微分方程初值问题给出的 C 在 $\mathbb{R}^3$ 中的运动:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{r}(s,t)}{\partial t} &= \frac{\partial\vec{r}(s,t)}{\partial s}\times\frac{\partial^2\vec{r}(s,t)}{\partial s^2}, \qquad s,t>0,\\
\vec{r}(s,0) &= \vec{r}_0(s), \qquad s\geq 0,\\
\vec{r}(s,t) &= \vec{r}(s+L,t), \qquad s\geq 0, t>0.
\end{aligned}$$

这里“×”指向量外积（向量积）。假定上述初值问题在 $0\leq t<M$, $s\geq 0$ 时有光滑解 $\vec{r}(s,t)$。其中 M 是某个正数。记 $\kappa(s,t)$ 为曲线 $\vec{r}(s,t)$ 在 t 时刻的曲率，假定 $\kappa(s,t)>0$ $(\forall s\geq 0, \forall t\in[0,M))$. 记 $\tau(s,t)$ 为曲线 $\vec{r}(s,t)$ 在 t 时刻的挠率。考虑如下问题:

i) 证明: 对任意固定的 $t\in[0,M)$, 参数 s 是曲线 $\vec{r}(s,t)$ 的弧长参数。(5分)

ii) 证明：$\kappa=\kappa(s,t)$ 满足如下运动方程:

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t} = -2\tau\frac{\partial\kappa}{\partial s} - \kappa\frac{\partial\tau}{\partial s}.$$

(10分)

iii) 证明：积分 $\int_0^L \kappa(s,t)^2\,ds$ 是与 t 无关的常数。(5分)

iv) 试证明：积分 $\int_0^L \tau(s,t)\,ds$ 和 $\int_0^L \kappa(s,t)^2\tau(s,t)\,ds$ 均是与 t 无关的常数。[提示：可以写出 $\tau=\tau(s,t)$ 满足的运动方程。]（附加题 10分）