2019年秋季学期微分几何(H)期末考试

主讲教师: 张希

2020年1月8日 14:30-16:30

一、（1）已知曲面Σ的第一基本形式为：$\mathrm{I}=\mathrm{d}r^2+f^2(r)\mathrm{d}\theta^2$，$f(r)>0$。求其 Gauss 曲率。（15 分）

（2）假设曲面Σ的第一基本形式为 $\mathrm{I}=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$，$y>0$。求其上的测地线。（15 分）

二、在常 Gauss 曲率（$K\equiv -1$）曲面上，计算：测地半径为 r_0 的测地圆周其上每点的测地曲率。（15 分）

三、设 Σ 是一张局部光滑的正则曲面，C为 Σ 中的光滑简单闭曲线，其围成单连通区域 Ω。假设曲面切向量 $\vec{V}$ 是沿曲线 C定义的非零平行向量场，且 $\vec{V}$ 和 C 的切向量夹角成定角。证明：$\iint_\Omega K\,dA=2\pi$，其中 K 是曲面 Σ 的 Gauss 曲率。（15 分）

四、设 S^2 是 E^3 中以原点为中心的单位球面，$\vec{a}$ 为E^3中的一固定方向。定义 S^2 上的函数 $f(x)=\langle\vec{r}(x),\vec{a}\rangle$，其中 $\vec{r}(x)$ 为球面的位置向量。证明：$\Delta_{S^2}f=-2f$，其中 Δ_{S^2} 为单位球面的 Laplace 算子。（15 分）

五、设C是E^3中的简单闭曲线，k 是它的曲率函数。则C的全曲率满足 $\int_C k\,ds\geq 2\pi$。（15 分）

六、设Σ和$\bar{\Sigma}$ 为 E^3 中的卵形面，设光滑映射 $f:\Sigma\to\bar{\Sigma}$ 是等距对应（即 $f^*(I_{\bar{\Sigma}})=I_\Sigma$）。证明：$f$ 必是 1:1 映射。（10 分）