中国科学技术大学2018年春
复分析期中考试试卷

2018年5月6日

姓名：________ 系别：________ 学号：________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8总分
得分								
阅卷人								

1. (5分) 设 f 为域 D 上的全纯函数且 $\mathrm{Im}f(z)$ 为常数，证明 f 为常数.

2. (15分) 计算下列积分.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1}(\bar{z})^2\mathrm{d}z$; (2) $\displaystyle\int_{|z|=1}|1-z||\mathrm{d}z|$;

(3) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z-4)^2(z^3-1)}$;

3. (32分) 判断下列说法是否正确，说明理由.

(1) 全纯函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 有原函数;

(2) 调和函数 $\log|z|$ 没有共轭调和函数;

(3) 设 f 在 $|z|<2$ 中全纯，且 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{nz-1}\mathrm{d}z=0$ 对任意正整数 n 成立，则 f 恒等于零;

(4) 方程 $4z^3-1=e^z$ 在 $|z|<1$ 中有三个根.

4. (8分) 设 f 为整函数，且 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^2}=1$. 证明：存在 $a,b\in\mathbb{C}$, 使得 $f(z)=z^2+az+b$.

5. (8分) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都在 $|z| \le 1$ 中全纯，在 $|z| < 1$ 中处处不为零，而且 $f(0) > 0, g(0) > 0$, 在 $|z| = 1$ 上 $|f(z)| = |g(z)|$. 证明：$f(z) = g(z)$.

6. (12分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R，证明：当 $0 < r < R$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

7. (12分) 求一个共形变换，将域 $\{z : 0 < |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ 映为单位圆盘 $\{z : |z| < 1\}$.

8. (8分) 设全纯函数 $f : B(0,1) \to B(0,1)$ 有两个不动点，证明 f 为恒等映射.