

# 2018年中国科学技术大学自主招生考试

该文档转载自百度文库版本

1.  $(\sqrt{3}i - 1)^{2018} =$  \_\_\_\_\_

2. 已知  $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ , 则  $\frac{\tan(\alpha + 15^\circ)}{\tan(\alpha - 15^\circ)} =$  \_\_\_\_\_

3. 设  $x > -\frac{1}{2}$ , 则  $f(x) = x^2 + x + \frac{4}{2x+1}$  的最小值为 \_\_\_\_\_

4. 设  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 则满足  $f(f(x)) = x$  的映射  $f: S \rightarrow S$  的个数是 \_\_\_\_\_

5. 设  $\alpha$  为复数,  $i$  为虚数单位, 关于  $x$  的方程  $x^2 + \alpha x + i = 0$  有实数根, 则  $|\alpha|$  的取值范围是

6. 已知定义在  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  是单射, 对任意的  $x > 0$ , 有  $xf(x) > 1$ ,

$f(xf(x) - 1) = 2$ , 则  $f(2) =$  \_\_\_\_\_

7. 在四面体  $ABCD$  中,  $\triangle ABC$  是斜边  $AB = 2$  的等腰直角三角形,  $\triangle ABD$  是以  $AD$  为斜边的等腰直角三角形, 已知  $CD = \sqrt{6}$ , 点  $P, Q$  分别在线段  $AB, CD$  上, 则  $PQ$  的最小值为

8. 点  $P$  在圆:  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$  上运动, 向量  $\overrightarrow{PQ}$  (其中  $O$  为原点) 绕  $P$  点逆时针旋转  $90^\circ$  得  $\overrightarrow{PQ'}$ , 则  $Q'$  点的轨迹方程为 \_\_\_\_\_

9. 过点  $(-1, 0)$  的直线  $m$  与抛物线  $y = x^2$  相交于  $A, B$ , 若  $\triangle AOB$  的面积为 3 (其中  $O$  为原点), 求直线  $m$  的方程

10. 求所有的二次实系数多项式  $f(x) = x^2 + ax + b$ , 使得  $f(x) \mid f(x^2)$

11. 设  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^3 (n + a_n)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

求证: (1)  $a_n = n^3 (1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2})$

(2)  $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{a_k}) < 3$