2018年春季学期微分方程2期中考试

整理人: 章俊彦 yx3x@mail.ustc.edu.cn, zhang.junyan@jhu.edu

2018年5月8日 10:00-12:10 主讲教师: 张宏

1. (1) 叙述弱导数的定义，并简单描述定义的动机；

(2) 设$U \subseteq \mathbb{R}^n$是区域，u在U上的经典导数a.e.存在，问:u在U上的弱导数是否存在？若是，请证明；若否，举出反例并验证。

2. (1)叙述Sobolev空间的定义；

(2) 设$U = B(0,1/2) \subseteq \mathbb{R}^n$，令$u(x) = |\log|x||^a$, 给出$a,n,p$满足的条件使得$u \in W^{1,p}(U)$;

(3) 将U换成$B(0,2)\backslash B(0.1/2)$, 求$a,n$的条件使得$u \in H^1(U)$.

3. 设$1 < p < \infty$, U是有界开区域.

(1)设$u \in L^1_{loc}(U)$且弱导数∇u存在。若$f \in C^1(\mathbb{R})$满足$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| < \infty$, 证明复合函数$f \circ u$的弱导数存在并满足$\nabla(f \circ u) = (f' \circ u)\nabla u$;

(2) Evans 5.18题；

(3) 证明：若$u \in W^{1,p}(U)$，则$|u| \in W^{1,p}(U)$并计算其弱导数和$W^{1,p}$范数。

(4) 若$u \in W^{1,p}(U)$，证明对任意常数c有$\nabla u = 0$ a.e. on $\{x : u(x) = c\}$.

4. 设$1 < p < \infty$, U是有界开区域并且边界C^1, $n \geq 2$.

(1) 叙述定义：$L^p(U)$上的序列弱收敛；

(2) 设$\{u_k\}$是$W^{1,p}$中的有界序列，证明：存在子列$\{u_{k_j}\}, u \in W^{1,p}$. 使得$u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$;

(3) 设$\{u_k\}$是$W^{1,p}$中的非负有界序列，且$1 \leq p < n$. 证明存在子列$\{u_{k_j}\}, u \in W^{1,p}$. 使得

$$\int_U u_{k_j}^{p^*-1} v\,dx \to \int_U u^{p^*-1} v\,dx.$$

5. (1) 设$1 \leq p \leq q \leq \infty, u \in L^p \cap L^q$. 证明$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}^a \|u\|_{L^q}^{1-a}$, 其中$0 \leq a \leq 1, 1/r = a/p + (1-a)/q$;

(2) 设$1 < p < n, 1 \leq q < r < p^*$, 对某个$a \in (0,1)$和某个常数$C > 0$有

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{L^q}^\theta \|\nabla u\|_{L^p}^{1-\theta}, \ \ \forall u \in W^{1,p} \cap L^q.$$

用scaling方法求θ并证明这个不等式。

6. 设U是有界开区域，$n \geq 2, 2 \leq p < \infty$.考虑$p$-Laplacian方程:

$$\begin{cases} \Delta_p u := \text{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x) & in\ U \\ u(x) = 0 \ \ on\ \partial U. \end{cases}$$

称$u \in W_0^{1,p}$是该方程的弱解是指：对任意$\phi \in W_0^{1,p}$成立

$$\int_U |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi = \int_U f\phi\,dx$$

. 现已知该问题的能量泛函为

$$E[u] = \frac{1}{p}\int_U |\nabla u|^p dx - \int_U fu\,dx.$$

(1) 证明: u_*是如上边值问题的弱解，当且仅当$E[u]$在u_*处的Fréchet导数是0；

(2) 证明：存在常数$u > 0$使得$E[u] \geq -C, \forall u \in W_0^{1,p}$;

(3) 设$\{u_k\}$是$W_0^{1,p}$中的有界序列，证明：存在子列$\{u_{k_j}\} \in W_0^{1,p}$. 使得

$$E[\liminf_j u_{k_j}] \leq \liminf_j E[u_{k_j}];$$

(4) 证明：存在$u_* \in W_0^{1,p}$使得$E[u_*] = \inf_{u \in W_0^{1,p}} E[u]$,从而$u_*$为如上边值问题的解。