整理：范惟
授课教师：兰小红

Mathematical Statistics 18mid

1 设 $X_1, \dots, X_n$ $i.i.d. \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$, 总体密度函数如下

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0.$$

a) (10 分) 若已知$\lambda = 1$，则样本容量n至少多大，才能使概率 $\mathbb{P}(X_{(1)} < 0.1) \geq 0.95$? 这里$X_{(1)}$是样本$X_1, \dots, X_n$极小值;

b) (5 分) 证明: 样本均值$\bar{X} \sim Gamma(n, n\lambda)$。 注：$Gamma(\alpha, \beta)$的密度函数为

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0.$$

c) (10 分) 求λ的一个矩估计$\hat{\lambda}_{MOM}$，并依此给出当$n = 10, \lambda = 0.05$时概率 $\mathbb{P}(\hat{\lambda}_{MOM} > 0.065)$的值（提示：$Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi_n^2$）。

d) (5 分) 请给出λ的一个充分完全统计量，说明理由;

2 (10 分) 设 $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 又有$X_{n+1} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$且与$X_1, \dots, X_n$独立。$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$均未知，求统计量$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 的分布? 这里$\bar{X}$和S^2分别是$X_1, \dots, X_n$的样本均值和样本方差。进一步，若已知样本容量$n = 8$, $\bar{X} = 1$, $S^2 = 16$, 求新样本$X_{n+1} > 7$的概率?

3 （10 分）设 $X_1,\dots,X_n$ i. i. d. $\sim\mathcal{N}(\theta,\theta^2),\theta>0$，证明$(\bar{X},S^2)$是θ的充分统计量。

4 设 $X_1,\dots,X_n$ 是从具有下列概率密度函数 $f(x)$ 的总体中抽取的简单样本，

$$f(x)=\begin{cases}c(\theta)\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, & |x|<\theta \\ 0, & 其它\end{cases},$$

其中$\theta>0$.

a) （10 分）请给出θ的一个极小充分统计量，说明理由；

b) （5 分）请给出θ的极大似然估计。

5 （10 分）设 $X_1,\dots,X_n$ i. i. d. $\sim$Bernoulli(p)，总体概率质量函数$\mathbb{P}(X=1)=p$，$\mathbb{P}(X=0)=1-p$，求极差$R_n=X_{(n)}-X_{(1)}$的期望$\mathbb{E}R_n$。

6 （10 分）设 $X_1,\dots,X_n$ 是从具有负二项分布的总体中抽取的简单样本，具体概率质量函数如下，

$$\mathbb{P}_\theta(X=x)=(x-1)\theta^{2}(1-\theta)^{x-2},x=2,3,\dots$$

而成功概率θ服从具有如下密度函数$\pi(\theta)$的先验分布

$$\pi(\theta)=6\theta(1-\theta),0<\theta<1.$$

求θ的后验分布$\pi(\theta|\bar{x})$及其 Bayes 估计$\hat{\theta}_B$；

7 （15 分）设 $X_1,\dots,X_n$ 是从具有如下密度函数的总体中抽取的简单样本，

$$f(x)=\frac{2}{\delta^2}x,0<x<\delta.$$

证明：$\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$与$X_{(n)}$独立。