中 国 科 学 技 术 大 学

2018—2019学年上学期期中考试

考试时间: 2018年11月2日9:40-11:40

考试科目: 数学分析(B3) 得分__________

学生所在系: __________ 学号______________ 姓名__________

除第一题之外, 所有题目的解答要求具备详细的论理过程.

问题一 (20分) 用$\epsilon-N$或者$\epsilon-\delta$语言重新叙述如下命题.

1a. 实数列$\{x_n\}$收敛于实数x.

1b. 定义于$D\subset\mathbb{R}$上的实值函数列$\{f_n\}$不一致收敛.

问题二 (10分) 设$\{x_n\}$为有界实数列, 并且它的任意子列都不是常数数列. 设A为它的附属集合. 证明: 集合A的聚点集合等于数列$\{x_n\}$的极限点集合.

问题三 (10分) 称一个实数x为代数数, 是指x是某个以整数为系数的不恒为零的多项式的根. 证明: $\mathbb{R}$中的代数数全体构成可数集合.

问题四 (10分) 证明无限紧致集合一定有聚点. 问同样的结论对无限开集, 无限闭集成立吗? 说明理由.

问题五 (10分) 设f为紧致区间$[a,b]$上的实值连续函数, 并且满足

$$\int_a^b f(x)\,x^k\,dx=0,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

证明f恒为零.

问题六 (14分) 设$\{f_n\}$为紧致区间$[a,b]$上的逐点有界的连续函数列, i.e. 对于任意$x \in [a,b]$, 存在正整数$N(x)$使得对于所有的n都成立$|f_n(x)| \leq N(x)$, 再设$\{f_n\}$在$[a,b]$上等度一致连续. 证明$\{f_n\}$有一致收敛子列.

问题七 (14分) 实直线$\mathbb{R}$上的黎曼函数$S(x)$的定义为:

当x为无理数时, $S(x) := 0$;　　当$x = 0$时, $S(x) := 1$;

当x为非零有理数且写成$x = \frac{p}{q}$ (其中p为整数, q为与p互素的正整数), $S(x) := \frac{1}{q}$.

证明: 对于任意$x \in \mathbb{R}$, 黎曼函数S在x处的极限等于0.

问题八 (12分) 设f为$(0,\infty)$上的连续函数, 并且对于任意$x > 0$都有$\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$, 此处$n$为正整数. 证明

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

参考解答

1B. 存在$\epsilon_0 > 0$, 存在两列严格单调增的正整数$\{n_k\}$与$\{m_k\}$, 存在属于D的点列$\{x_k\}$, s.t.

$$| f_{n_k}(x_k) - f_{m_k}(x_k) | \geq \epsilon_0.$$

2. 由定义, A的聚点一定是$\{x_n\}$的极限点. 任给$\{x_n\}$的极限点x, 存在子列$\{x_{n_k}\}$收敛于x. 由条件, 该子列中等于x的项为有限项, 从而存在A中一列每项都不等于x, 且收敛于x的点列, i.e. x是A的聚点.

4. 任取无限紧致集合A中的一列两两不同的点列$\{x_n\}$, 由紧致性可以不妨设$x_n \to x \in A$. 由定义知x是A的聚点. 设B是无限开集, 那么由开集结构定理知B至少包含一个非空开区间(a, b), 里面的点都是B的聚点. 无限闭集可能没有聚点, 比如整数集合.

6. 逐字逐句地照搬讲义中的证明即可. 事实上, 逐点有界加上等度一致连续蕴含一致有界.

7. 任取实数x, 任取正整数n. 观察到x到$\mathbb{R}$的不包含x的闭子集

$$A := \{k/m : k \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq m \leq n\} - \{x\}$$

的距离$\inf_{y \in A} |x - y|$大于零, 记作$d = d_{x,n}$. 任取小于d的正数δ, 任取开区间$(x-\delta, x+\delta)$中不等于x的数y, 要么y为无理数则$f(y) = 0$, 要么y为有理数, 则由δ的取法与f的定义知$|f(y)| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. 于是总成立$|f(y)| < \frac{1}{n}$. 得证.

8. 设$[a,b]$为有限闭区间，设$\alpha>0$，那么将$[\alpha a,\alpha b]$记作$\alpha[a,b]$．假设存在$\epsilon_0>0$与发散到∞的正数列$\{x_n\}$使得对所有的n成立$f(x_n)>2\epsilon_0$．那么由f连续，存在$0<\delta_1<x_1$使得f在闭区间$I_1:=[x_1-\delta_1,x_1+\delta_1]$上的取值都大于$\epsilon_0$．存在$N_1$，对于任意$n\geq N_1$都有

$$(1+n)(x_1-\delta_1)<n(x_1+\delta_1).$$

于是成立

$$\bigcup_{k=N_1+1}^{\infty}\mathrm{Int}(kI_1)=\big((N_1+1)(x_1-\delta_1),\infty\big).$$

由于$x_n\to\infty$，当n充分大时，x_n属于$\big((N_1+1)(x_1-\delta_1),+\infty\big)$．不妨设为$x_2$属于$\big((N_1+1)(x_1-\delta_1),+\infty\big)$，从而存在$N_2>N_1$使得$x_2\in\mathrm{Int}(N_2I_1)$．由$f$连续，存在$0<\delta_2<x_2$使得$f$在$[x_2-\delta_2,x_2+\delta_2]$上的取值都大于$\epsilon_0$，并且

$$I_2:=\frac{1}{N_2}[x_2-\delta_2,x_2+\delta_2]\subset I_1$$

.

存在$k_2>N_2$使得$x_3,x_4,\dots$中充分往后的项都属于

$$\bigcup_{k=k_2}^{\infty}\mathrm{Int}(kI_2)=\big(k_2(x_2-\delta_2),\infty\big).$$

不妨设为$x_3\in\mathrm{Int}(N_3I_2)$，其中$N_3$为某个大于等于$k_2$的整数．于是存在$0<\delta_3<x_3$使得$f$在$[x_3-\delta_3,x_3+\delta_3]$上的取值大于$\epsilon_0$，并且

$$I_3:=\frac{1}{N_3}[x_3-\delta_3,x_3+\delta_3]\subset I_2.$$

一直延续下去．我们得到闭(紧致)区间套$I_1\supset I_2\supset I_3\cdots$，并且对于任意$k\geq 2$与任意$x\in I_k$，都有$|f(N_kx)|>\epsilon_0$．由闭区间套定理，存在$0<z\in\bigcap_{k=2}^{\infty}I_k$，故对所有$k\geq 2$都有$|f(N_kz)|>\epsilon_0$，这与$\lim_{n\to\infty}f(nz)=0$矛盾．