中 国 科 学 技 术 大 学

2018—2019学年上学期期末考试A卷

考试时间: 2018年1月9日8:30-10:30

考试科目: 数学分析(B3)　　　　得分＿＿＿＿

学生所在系: ＿＿＿＿　　　　学号＿＿＿＿＿＿　　　　姓名＿＿＿＿

除第一题之外, 所有题目的解答要求具备详细的论理过程.

问题一 (12分) 用$\epsilon-N$或者$\epsilon-\delta$语言重新叙述如下命题.

1a. 实数列$\{x_n\}$是Cauchy 列.

1b. 定义在$[0,1]$上的实值函数f一致连续.

问题二 (12分) 设U是n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的有界开子集, ∂U是U的边界集合, 并且$K\subset U$是$\mathbb{R}^n$的紧致子集. 证明: ∂U不是空集, 并且$d\big(K,\partial U\big):=\inf\{|x-y|: x\in K, y\in\partial U\}>0$.

问题三 (10分) 设f是实直线$\mathbb{R}$上的2π周期函数, f在$[-\pi,\pi]$上黎曼可积, 且$x_0\in[-\pi,\pi]$. 证明: 如果f 在x_0处连续, 那么$\lim_{N\to\infty}\sigma_N f(x_0)=f(x_0)$, 其中$\sigma_N f(x)$是$f(x)$与Fejér 核

$$K_N(x)=\frac{1}{2(N+1)}\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

的周期卷积.

问题四 (14分) 设$\langle\cdot,\cdot\rangle$为$n$维欧氏空间$\mathbb{R}^n$上的欧氏内积, 给定$x',y'\in\mathbb{R}^n$, $t'\in\mathbb{R}$.

4A 设$\phi(x,y,t)=\Big(x+x', y+y', t+t'+\langle x,y'\rangle-\langle x',y\rangle\Big)$, 其中$x,y\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$. 证明ϕ为$(2n+1)$维欧氏空间$\mathbb{R}^{2n+1}$到自身的C^1参数变换.

4B 设f是$\mathbb{R}^{2n+1}$上具有紧致支集的连续函数. 证明

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f\big(\phi(x,y,t)\big)\,dx\,dy\,dt=\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(x,y,t)\,dx\,dy\,dt.$$

问题五 (10分) 设f与g为实直线$\mathbb{R}$上的C^1实值函数, $f(1)=g(1)=0$, 并且$\big(f'(1)\big)^2\neq\big(g'(1)\big)^2$. 定义映射

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y,z)\mapsto\Big(f(xy)+g(yz), f(yz)+g(xy)\Big).$$

证明: $F(x,y,z)=0$在点$(1,1,1)$附近有解$(y,z)=\big(y(x),z(x)\big)$.

问题六 (14分) 设$D=(0,1)\times(0,1)$, 称$P=(x,y)\in D$为有理点, 如果它的两个坐标x,y都是有理数. 此时我们用既约分数表示有理点$P\in D$的坐标$P=\left(\frac{p}{q},\frac{p'}{q'}\right)$, 其中$(p,q)=(p',q')=1$. 如下定义黎曼函数$f$:

- 当$P=\left(\frac{p}{q},\frac{p'}{q'}\right)$为既约分数表示的有理点的时候, 定义$f(P)=\frac{1}{qq'}$;
- 当P不是有理点时, 定义$f(P)=0$.

证明: f在非有理点处连续, 并且$\iint_D f(x,y)\,dxdy=0$.

问题七 (14分) 设$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,\varphi(x,y,z):=\left(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2\right)^2-4R^2\left(x^2+y^2\right)=0\right\}$, 其中$R>r>0$为常数.

7A 证明T为$\mathbb{R}^3$中的C^1曲面.

7B 证明定义在T上的函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$能取到最大值, 并求出该值.

问题八 (14分) 设$\{f_n\}$是有限闭区间$[a,b]$上的黎曼可积函数列, 且$\{f_n\}$一致收敛于f.

8A 证明数列$a_n=\int_a^b f_n(x)\,dx$收敛, 设其极限为a.

8B 证明f在$[a,b]$上黎曼可积并且$\int_a^b f(x)\,dx=a$.

参考解答

1. 每问依照0,3,6分三档给分.

2. 假设∂U为空集. 由于U为有界集合, 那么$\mathrm{Int}(U^c)$必定不是空集. 由于U为开集并且∂U空, 那么$\mathbb{R}^n$可以写成两个非空不交开集之并: $\mathbb{R}^n = U \sqcup \mathrm{Int}(U^c)$. 这与$\mathbb{R}^n$道路连通从而连通相矛盾. (6分)

由于U有界, ∂U为有界闭子集, 从而紧致. 分别取K与∂U上的点列x_n与y_n使得$|x_n - y_n| \to d(K, \partial U)$. 由于$K$与$\partial U$都紧致, 通过取两次子列的操作, 不妨设$x_n \to x_0 \in K$, $y_n \to y_0 \in \partial U$. 由于$x_0 \in K \subset U$, 从而$x_0 \notin \partial U$, $x_0 \neq y_0$. 由三角不等式知$|x-y|$在$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上连续, 从而$d(K, \partial U) = |x_0 - y_0| > 0$. (6分)

3. 这是一道作业题.

4A. 不难看出$\phi^{-1}(x,y,t) = \big(x - x', y - y', t - t' + \langle x', y\rangle - \langle x, y'\rangle\big)$, 并且通过具体计算$\phi$与$\phi^{-1}$的 Jacobian 矩阵知它们都属于$C^1$. (6分)

4B. 由于ϕ的 Jacobian 因子恒等于一再利用积分换元公式便得证. (8分)

5. 由条件知$F = (F_1, F_2) \in C^1$, $F(1,1,1) = 0$, 并且在点$(1,1,1)$处

$$\det \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial y & \partial F_1/\partial z \\ \partial F_2/\partial y & \partial F_2/\partial z \end{pmatrix} = \big(f'(1)\big)^2 - \big(g'(1)\big)^2 \neq 0,$$

由隐映射定理得证.

6. 第一问是一道作业题的变形(6分), 第二问是一个例题(8分).

7A. 首先容易求出φ关于x, y, z的一阶偏导数分别为

$$\varphi_x = 4x\left(x^2+y^2+z^2-R^2-r^2\right), \quad \varphi_y = 4y\left(x^2+y^2+z^2-R^2-r^2\right), \quad \varphi_z = 4z\left(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2\right),$$

从而$\varphi \in C^1$. 结合方程$\varphi(x, y, z) = 0$进行分情况讨论, 不难得到梯度向量$\nabla\varphi$在T上每点都恒不为零, 从而T为$\mathbb{R}^3$ 中的二维C^1曲面. (6分)

7B. 首先由于T是C^1函数φ的零点集合, 从而为闭集. 另一方面, 不难看出T上每点到原点的距离都不超过$2R$, 从而T为紧致集合. 所以类似于第二题的证明, 必定存在点$P = (x, y, z) \in T$使得

$$f(P) = \text{the square of the distance between } P \text{ and } O = (0, 0, 0)$$

达到最大值. (4分) 利用讲义中的一道习题知向量(x, y, z)一定与$\nabla\varphi(x, y, z)$成比例, 从而得到$z = 0$且$\left(x^2+y^2+R^2-r^2\right)^2 = 4R^2(x^2+y^2)$. 所以$f$在$T$上的最大值等于$x^2+y^2 = (R+r)^2$. (4 分)

注意: T是环面.

8A. 利用f_n的黎曼和以及f_n一致收敛的 Cauchy 准则, 不难证明a_n为 Cauchy 列, 从而收敛, 设其收敛到a(6分)

8B. 利用三角不等式, f的黎曼和与a之差的绝对值可以被如下三项之和控制:

- f的黎曼和与f_n的黎曼和之差的绝对值,
- f_n的黎曼和与a_n的黎曼和之差的绝对值,
- $|a_n - a|$.

得证. (8分)

中 国 科 学 技 术 大 学

2018—2019学年上学期期末考试B卷

考试时间: 2018年1月9日8:30-10:30

考试科目: 数学分析(B3) 得分__________

学生所在系: __________ 学号______________ 姓名__________

除第一题之外，所有题目的解答要求具备详细的论理过程.

问题一 (12分) 用$\epsilon-N$或者$\epsilon-\delta$语言重新叙述如下命题.

1a. 定义在实直线$\mathbb{R}$的子集D上的实值函数$f: D\to\mathbb{R}$在$x_0\in D$处连续.

1b. 定义在$[0,1]$上的实值函数列$\{f_n\}$一致收敛.

问题二 (12分) 设K是n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的紧致集合, 并且K中每个点都是孤立点, i.e. 对于任意$x\in K$, 存在以x为心的开球B, 使得$B\cap K=\{x\}$. 证明: K是有限集合.

问题三 (10分) 设f是实直线$\mathbb{R}$上的2π周期连续函数. 证明: $\sigma_N f$一致收敛于f, 其中$\sigma_N f(x)$是$f(x)$与Fejér核

$$K_N(x)=\frac{1}{2(N+1)}\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

的周期卷积.

问题四 (14分) 设$\langle\cdot,\cdot\rangle$为$n$维欧氏空间$\mathbb{R}^n$上的欧氏内积, 给定$x',y'\in\mathbb{R}^n$, $t'\in\mathbb{R}$.

4A 设$\psi(x,y,t)=\big(x-x', y-y', t-t'+\langle x',y\rangle-\langle x,y'\rangle\big)$, 其中$x,y\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$. 证明ψ为$(2n+1)$维欧氏空间$\mathbb{R}^{2n+1}$到自身的C^1参数变换.

4B 设f是$\mathbb{R}^{2n+1}$上具有紧致支集的连续函数. 证明

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f\big(\psi(x,y,t)\big)\,dx\,dy\,dt=\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(x,y,t)\,dx\,dy\,dt.$$

问题五 (10分) 设f与g为实直线$\mathbb{R}$上的C^1实值函数, $f(1)=g(1)$, 并且$\big(f'(1)\big)^2\neq\big(g'(1)\big)^2$. 定义映射

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y,z)\mapsto\Big(f(xy)-g(yz), f(yz)-g(xy)\Big).$$

证明: $F(x,y,z)=0$在点$(1,1,1)$附近有解$(y,z)=\big(y(x),z(x)\big)$.

问题六 (14分) 将有限闭区间$[a,b]$上的实值连续函数全体记作$C[a,b]$.

- 证明$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$为$C[a,b]$上的范数.
- 证明赋范空间$\big(C[a,b], \|\cdot\|_1\big)$不完备.

问题七 (14分) 设$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y,z) := \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\right\}$, 其中$a>b>0$为常数.

7A 证明T为$\mathbb{R}^3$中的C^1曲面.

7B 证明定义在E上的函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$能取到最大值, 并求出该值.

问题八 (14分) 设$\{f_n\}$是$\mathbb{R}^2$上的 Jordan 可测集合D上的黎曼可积函数列, 且$\{f_n\}$在D上一致收敛于f.

8A 证明数列$a_n := \iint_D f_n(x,y)\,dxdy$收敛, 设其极限为$a$.

8B 证明f在D上黎曼可积并且$\iint_D f(x,y)\,dxdy = a$.