中国科学技术大学

2017−2018学年第二学期期末考试试卷

考试科目：数学分析A2　　　　得分：

学生所在系：　　　　姓名：　　　　学号：

2018 年 7 月 9 日

一、(15分)　　得分 |

讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在$(0,0)$处的连续性和可微性.

二、(15分)　　得分 |

在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点, 使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿方向$\mathbf{l}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ 的方向导数的值最大.

三、(15分)　　得分 |

设变换$\begin{cases}u=x+a\sqrt{y},\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 把方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 试确定$a$的值.

四、(15分)　　得分 |

设f,g为$(-\infty,+\infty)$上的连续可微函数, $f(0)=g(0)=1$, 且第二型曲线积分$\int_A^B yf(x)dx+(f(x)+zg(y))dy+g(y)dz$在整个空间区域上与路径无关, 只与起点$A$ 与终点B 有关. 求出向量场$\mathbf{F}(x,y,z)=(yf(x),f(x)+zg(y),g(y))$的势函数.

五、(10分)

得分	

计算第二型曲线积分$\int_{L^+} \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$, 其中$L$为不通过原点的简单光滑闭曲线, L^+为逆时针方向.

六、(10分)

得分	

计算第二型曲面积分$\iint_{\Sigma} zdxdy+ydzdx+xdydz$, 其中$\Sigma$ 为圆柱面$x^2+y^2=1$被$z=0$ 和$z=3$所截部分的外侧.

七、(10分)

得分	

设函数$f(x,y)$在原点附近有直到二阶的各种形式的连续偏导数, S是球面$x^2+y^2+z^2=r^2(r>0)$, 求$\lim\limits_{r\to 0^+} \frac{\iint\limits_{S}[f(x,y)-f(0,0)]d\sigma}{r^4}$的值.

八、(10分)

得分	

设$f(x,y)$为具有二阶连续偏导数的二元齐次函数, 即对任意x,y,t成立$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$.

(1) 证明：$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=2f(x,y)$.

(2) 设D是由$L:x^2+y^2=4$所围成的闭区域, 证明：

$$\int_L f(x,y)ds=\iint_D (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})dxdy\ .$$