中国科学技术大学数学科学学院
2018年秋季学期期末考试试卷

课程名称	微分几何	课程编号	00101301/02
考试时间	2019年1月17日14:30-16:30	考试形式	闭卷

姓名__________ 学号______________ 学院__________

题号	1	2	3	4	5				总分
得分									

请将答案写在答题纸上，本试卷和答题纸一并上交。

1. $(20')$ 设 $a>0, b\neq 0$ 为常数。考查曲面片

$$r = r(u,v) = (a\cos u,\ a\sin u,\ bv),$$
$$0<u<2\pi,\ -\infty<v<+\infty,$$

上的曲线

$$\gamma(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt),\ 0<t<2\pi.$$

(1) 求曲线 γ 的曲率和挠率。

(2) 设$t_0\in(0,2\pi)$. 求曲面在 $\gamma(t_0)$ 处沿切向量 $\gamma'(t_0)$ 的法曲率。

(3) 判断曲线 γ 是否为曲面上的测地线并说明理由。

2. (20′) 设 M 是 E^3 中的一正则曲面片，可以参数化为

$$r = r(u,v) = (a\cosh v\cos u,\ a\cosh v\sin u,\ av),$$
$$0 < u < 2\pi,\ -\infty < v < +\infty,$$

这里 $a > 0$ 为常数。

(1) 证明：

$$e_1 := \frac{r_u}{a\cosh v},\quad e_2 := \frac{r_v}{a\cosh v}$$

和 $e_3 := e_1 \wedge e_2$ 给出 M 的一个正交活动标架。

(2) 记上述正交活动标架的运动方程为：

$$dr = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2,$$
$$de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} e_j,\ i = 1,2,3.$$

求微分一形式 ω_1, ω_2 和 ω_{12}.（表为 du, dv 的线性组合。）

(3) 利用(2)的结果，计算 M 的高斯曲率。

3. (15′) 在球面 $r = r(u,v) = (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ a\sin u)$, $-\pi/2 < u < \pi/2$, $0 \le v \le 2\pi$ 上，考虑纬圆 $C(v) := r(u_0, v)$, $0 \le v \le 2\pi$，这里 $u_0 \in (0, \pi/2)$. 计算沿曲线 C 其测地曲率 k_g 的积分 $\oint_C k_g ds$.

4. (15′) 证明：

(1) 任意极小曲面必有高斯曲率 $K \le 0$.

(2) 高斯曲率 $K \equiv 0$ 的连通极小曲面必为平面的一部分。

5. (30′) 设 M 是 $\boldsymbol{E}^3$ 中的一正则曲面片，可以参数化为 $r = r(u, v)$. 则 $\{r_u, r_v, n\}$ 为其自然标架场，这里 n 为单位法向量场。对任意一点 $p \in M$，记

$$\mathcal{W} : T_pM \to T_pM$$

为Weingarten 变换。

(1) 给出 $\mathcal{W}(r_u)$ 和 $\mathcal{W}(r_v)$ 的值。

(2) 求变换 $\mathcal{W}$ 在 T_pM 的基 $\{r_u, r_v\}$ 下的矩阵表示。(给出计算过程。)

(3) 证明下式成立：

$$\frac{D}{dv}\frac{D}{du}r_u - \frac{D}{du}\frac{D}{dv}r_u = K \cdot |r_u \wedge r_v| \cdot \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u),$$

这里 $\frac{D}{du}, \frac{D}{dv}$ 是求协变导数，K 是高斯曲率，$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u)$是将 r_u 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 所得的向量，也即

$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u) = |r_u| \cdot \frac{(r_v)^{\perp}}{|(r_v)^{\perp}|},$$

其中 $(r_v)^{\perp} := r_v - \langle r_v, \frac{r_u}{|r_u|} \rangle \cdot \frac{r_u}{|r_u|}$.