微分方程II期末考试供题

1. 设$U \subseteq \mathbb{R}^n$是边界光滑的有界开集. 设$\{w_k\} \subseteq H_0^1(U)$是$-\Delta$(零边值条件)的特征函数(构成$H_0^1(U)$的一组正交基), $f \in L^2(U), u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k$满足

$$\int_U Du_m \cdot Dw_k dx = \int_U f w_k dx. \ (k = 1, 2, \cdots, m)$$

证明: 存在$\{u_m\}$的子列, 在$H_0^1(U)$中弱收敛到如下方程的弱解u:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \ in\, U \\ \quad u = 0 \ \ on\, \partial U. \end{cases}$$

(Galerkin Method for Poisson Equation, Ch7, Ex.4)

2. 设$U \subseteq \mathbb{R}^n$是边界光滑的有界开集. 设$\{w_k\} \subseteq H_0^1(U)$是$-\Delta$(零边值条件)的特征函数(构成$H_0^1(U)$的一组正交基), $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(U)), g \in L^2(U)$. 设

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k$$

满足

$$d_m^k(0) = (g, w_k)_{L^2(U)}, (\mathbf{u}_m', w_k) + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}, w_k), \ \ 0 \le t \le T, k = 1, 2, \cdots, m.$$

其中

$$B[u, v; t] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot, t) u_{x_i} v + c(\cdot, t) uv dx, \ \ \forall u, v \in H_0^1(U), \ a.e.\, 0 \le t \le T, a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T).$$

证明:存在只与U, T, a^{ij}, b^i, c有关的正常数C, 使得

$$\sup_{0 \le t \le T} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} \le C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}).$$

(抛物方程能量估计)

3. 设

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u \ \ in\, (t, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \\ \quad u = 0 \ \ on\, \{x = 0\} \cup \{x = 1\}. \\ u(0, x) = \sin(\pi x), \partial_t u(0, x) = x. \end{cases}$$

证明:$E(t) := \int_0^1 (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 dx$是常数, 并计算这个常数.

(1D 零边值波方程的能量守恒)

4.设$u(t, x) \in C^{1,2}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d), f(x) \in C^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$满足微分方程$\partial_t u - \Delta u = 0, \ u(0, x) = f(x)$. 证明:

$$||u||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C t^{-\frac{d}{2}(1 - \frac{1}{p})} ||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad 1 \le p < +\infty.$$

(热方程的衰减估计)

5.设$u(x, t)$上如下热方程的光滑解:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \ \ in\, \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ \qquad u = g \ \ on\, \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

其中$f\in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)), g\in C^1(\mathbb{R}^n), Dg\in L^2(\mathbb{R}^n.)$

证明:

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^2dx+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t u)^2+|D^2u|^2dxdt\le C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}f^2dxdt+\int_{\mathbb{R}^n}|Dg|^2dx\right).$$

(课本7.1.3节，热方程解的正则性的先验估计)

6. 设$U=(0,1)$.

(1)方程

$$\begin{cases}u''+\lambda u=0 \ \ in\, U\\ \qquad\quad u=0 \ \ on\,\partial U.\end{cases}$$

在λ取何值时有非零解？并计算此时的λ及对应的解u.

(2)对于方程

$$\begin{cases}u''+\dfrac{\pi^2}{2}u=x \ \ in\, U\\ \qquad\quad u=0 \ \ on\,\partial U.\end{cases}$$

证明:该方程的解u存在且唯一, 满足

$$\int_0^1 u^2dx\le\frac{4}{3\pi^4}.$$

(椭圆方程的特征值问题)

7. 设$U=(0,2\pi)\times(0,2\pi)$.

(1)方程

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0 \ \ in\, U\\ \qquad\quad u=0 \ \ on\,\partial U.\end{cases}$$

在λ取何值时有非零解？并计算此时的λ及对应的解u.

(2)证明:方程

$$\begin{cases}\Delta u+\dfrac{5}{4}u=ax+by+c \ \ in\, U\\ \qquad\quad u=0 \ \ on\,\partial U.\end{cases}$$

有H_0^1弱解的充分必要条件是$a=b=0$.

(3)用Lax-Milgram定理证明

$$\begin{cases}\Delta u+\dfrac{1}{4}u=x^2+y^2 \ \ in\, U\\ \qquad\quad u=0 \ \ on\,\partial U.\end{cases}$$

存在唯一H_0^1弱解u. 并证明:$\int_U u^2\le 128\pi^2/3$.

(椭圆方程的特征值问题、二择一，计算特征值用分离变量法。)

8. 设$U\subseteq\mathbb{R}^n$是边界光滑的有界开集. L是U上的一致椭圆算子, Σ是L的全体特征值构成的集合. 设$f\in L^2(U), \lambda\notin\Sigma$, $u\in H_0^1(U)$是如下方程的唯一弱解:

$$\begin{cases}Lu+\lambda u=f \ \ in\, U\\ \qquad\quad u=0 \ \ on\,\partial U.\end{cases}$$

证明存在仅依赖于λ,U,L的正常数C, 使得

$$\|u\|_{L^2(U)}\le C\|f\|_{L^2(U)}.$$

(课本定理, 第三存在性定理的推论)

9. 设具有紧支集的函数$u\in H^1(\mathbb{R}^n)\cap L^6(\mathbb{R}^n)$是半线性方程$-\Delta u+u^3=f \ \ in\,\mathbb{R}^n$的弱解, 其中$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明:$u\in H^2(\mathbb{R}^n)$.

(课本第六章习题7, 令$c(u)=u^3$.)

10. 设$U\subseteq\mathbb{R}^n$是边界光滑的有界开集. 设$f\in C(\bar{U}).g\in C(\partial U), a(x)\geq 0$. 证明:方程

$$\begin{cases} -\Delta u+u=f \;\; in\, U \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}+a(x)u=0 \;\; on\,\partial U. \end{cases}$$

有唯一解$u\in C^2(U)\cap C^1(\bar{U})$.

(极大值原理)

11. 设$U\subseteq\mathbb{R}^n$是边界光滑的有界开集, 问方程

$$\begin{cases} -\Delta u+u=1 \;\; in\, U \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0 \;\; on\,\partial U. \end{cases}$$

是否有恒大于0的解$u\in C^2(U)\cap C^1(\bar{U})$?

(极大值原理)

12. 设$d\geq 3$, 有界、连通且边界光滑的开集$U\subset\mathbb{R}^d$是关于0的星形域, 即对于任意$x\in\bar{U}, \{ax|0\leq a\leq 1\}\subseteq\bar{U}$. 且已知$x\cdot\nu(x)\geq 0 \;\; on\,\partial U$. 设$u\in C^2(\bar{U})$满足方程:

$$\begin{cases} -\Delta u=|u|^{p-1}u \;\; in\, U \\ \quad u=0 \;\; on\,\partial U. \end{cases}$$

(1)证明:

$$\int_U |Du|^2dx=\int_U |u|^{p+1}dx.$$

(2)利用在方程两边同时乘以$(x\cdot Du)$并在U上积分, 证明:

$$\left(\frac{d-2}{2}\right)\int_U |Du|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\partial U}|Du|^2(\nu\cdot x)dS=\frac{d}{p+1}\int_U |u|^{p+1}dx$$

(3)证明当$p>\frac{d+2}{d-2}$时, 原方程只有零解.

(Derrick-Pohozaev Identity, Chapter 9.4)

13. 设$u\in C^2(\mathbb{R}^d\times(0,\infty))$满足方程$\partial_t^2u-\Delta u=0 \;\; in\,\mathbb{R}^d\times(0,\infty)$. 固定$(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^d\times(0,\infty)$, 定义该点处的光锥为

$$K(x_0,t_0)=\{(x,t)|0\leq t\leq t_0\,|x-x_0|\leq t_0-t\}.$$

(1)证明:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{B(x_0,t_0-t)}(\partial_t u(x,t))^2+|Du(x,t)|^2dx, \;\; 0\leq t\leq t_0$$

单调递减.

(2)若在$B(x_0,t_0)\times\{t=0\}$上$u=\partial_t u=0$, 证明:$u=0$.

(波动方程有限传播速度, 课本第二章最后一个定理)