中国科学技术大学
2017年秋季学期微分方程I期中试卷

姓名：　　　　院系：　　　　学号：

2017年11月25日

本次考试为闭卷考试，一旦发现作弊，会严肃处理．本试卷共四个大题，满分120分．

一、求解下列方程通解．(每题12分，共72分)

1. $(ye^x+2e^x-y^2)\mathrm{d}x+(e^x+2xy)\mathrm{d}y=0$.
2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\tan x=\sin(2x)$.
3. $y'=\cos(x-y)$.
4. $(3x+\frac{6}{y})\mathrm{d}x-(\frac{x^2}{y}+\frac{3y}{x})\mathrm{d}y=0$.
5. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}$, 其中$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$.
6. $y''+y'-2y=2x$.

二、(15 分) 考虑方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y)$, 其中$f$ 为$\mathbb{R}$ 上连续可微函数．试证明：如果$y=\phi(x)$ 为此方程的一个解且存在$T\in\mathbb{R}$ 使得$\phi(T)=\phi(0)$, 则$\phi(t)\equiv\phi(0)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

三、(15 分) 判定方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y^2-\sin x,\end{cases}$$

的平衡点$(0,0)$ 和$(\pi,0)$ 的正向稳定性并说明理由．

四、(18 分) 考察n 阶非常系数线性齐次方程组的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x},\\[2mm] \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^0.\end{cases}$$

这里$A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 且$a_{ij}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续有界．试证明：

1. 如果$a_{ij}(t)\geq 0,\forall i,j=1,2,\cdots,n$, 并且$\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\mathbb{R}_+^n$ 即$x_i^0\geq 0,\forall i=1,2,\cdots,n$, 则$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}_+^n$, $\forall t\geq 0$.

2. 如果对任意的$i,j=1,2,\cdots,n$ 且$i\neq j$ 有$a_{ij}(t)\geq 0$, 并且$\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\mathbb{R}_+^n$, 则$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}_+^n$, $\forall t\geq 0$.

中国科学技术大学
2017年秋季学期微分方程I期末试卷

姓名：　　　　　　　　院系：　　　　　　　　学号：

本次考试为闭卷考试，一旦发现作弊，会严肃处理.

1.(20 分) 求解

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + 2xt, & t > 0,\ -\infty < x < +\infty, \\ u|_{t=0} = x^2,\ u_t|_{t=0} = \sin 2x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

2.(20 分) 求解

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 1, & 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} = \dfrac{5}{4} + \cos^2\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ u|_{r=2} = 1 + \sin^2\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

这里(r,θ) 为极坐标.

3.(20 分) 求解方程组

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + v, & t > 0,\ x \in (0,\pi), \\ v_t = v_{xx}, & t > 0,\ x \in (0,\pi), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = v(t,0) = v(t,\pi) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) = \sin x, & x \in [0,\pi], \\ v(0,x) = \sin 2x, & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

4.(20 分) 考虑

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x, & t > 0,\ x \in (0,2\pi), \\ u(t,0) = u(t,2\pi) & t > 0, \\ u_x(t,0) = u_x(t,2\pi), & t > 0, \\ u(0,x) = \sin 2x, & x \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

(i) (7 分) 写出相应的分离变量方程.

(ii) (8 分) 把关于x 的方程化为Strum-Liouville 型，并判断是否满足Strum-Liouville 定理条件，说明理由.

(iii) (5 分) 求解.

5.(20 分) 考虑方程$u_t = u_{xx} + u$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. 设初值函数满足$u(0,x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$

(i) (6 分) 求解(可以用积分表示).

(ii) (5 分) 试证明: 对任意给定$t>0$, $u(t,x)$ 在$x\in[0,+\infty)$ 上为单调减函数.

(iii) (5 分) 试证明: 对任意给定$x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t,x)=+\infty$.

(iv) (4 分) 试证明: 对任意$A>0$, 存在$T>0$, 使得当$t>T$ 时, 存在且只存在一对$x^{\pm}(t)$, $x^-(t)<x^+(t)$ 使得$u(t,x^-(t))=u(t,x^+(t))=A$ 且$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x^-(t)}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x^+(t)}{t}=2$.(提示:可以考虑上下极限, 用反证法)

6.(20 分) 令l, T 为正常数, 且$U_T=(0,T]\times(0,l)$; $\overline{U_T}=[0,T]\times[0,l]$; $\Gamma_T=\overline{U_T}\setminus U_T$. 函数$c(t,x)\in C(\overline{U_T})$且$c(t,x)>0$, $\forall(t,x)\in\overline{U_T}$, 设函数$u=u(t,x)\in C^2(U_T)\cap C(\overline{U_T})$.

(i) (14 分) 求证: 如果$u_t-u_{xx}+c(t,x)u\ge 0$, $\forall(t,x)\in U_T$, 则$\min_{\overline{U_T}}u\ge-\max_{\Gamma_T}u^-$. 这里$u^-:=$ -$\min\{u,0\}$.

(ii) (6 分) 求证: 如果u 满足

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}-c(t,x)u+u, & (t,x)\in U_T,\\ u(t,0)=u(t,l)=0, & t\in(0,T],\\ u(0,x)=\sin(\frac{\pi}{l}x), & x\in[0,l]. \end{cases}$$

则$u(t,x)\ge 0$, $\forall(t,x)\in U_T$.

附:

1. 可直接利用达朗贝尔公式.

2. $F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2t}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}exp(-\frac{x^2}{4a^2t})$.