2017年秋季学期数学分析(A3)期末考试

主讲教师: 李思敏、左达峰

2018年元月10日 8:30-10:30

一、判断题（简述原因）

1. 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛是否蕴含$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

2. 积分$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$收敛是否蕴含$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

二、请叙述含参反常积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$关于$u \in I$($I$上区间)上一致收敛的定义与柯西收敛原理。

三、计算题

1. $\lim_{a\to 0} \int_0^1 x^2 \cos(ax)\,dx$.

2. 计算极限$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$.

3. 令含参积分$\phi(u) := \int_0^u \frac{\ln(1+ux)}{x}\,dx$, ($u \in \mathbb{R}$), 求$\phi'(u)$.

4. 计算$e^{-\beta x}$的正弦傅立叶变换，其中$\beta, x > 0$.

四、(1) 证明: 反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^u} dx$在$u \in (0,1]$上条件收敛。

(2) 证明: $\phi(a) := \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$关于$a \in [0,+\infty)$一致收敛。

(3) 计算(2)中的$\phi(a)$的导数，并借此求出$\phi(a)$的表达式，其中$a \geq 0$.

五、求$f(x) = sgn(x)$, $|x| \leq \pi$的傅立叶级数，并借此计算$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$和$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

六、令积分核

$$K_n(x,t) := \begin{cases} n & t \in [x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}] \\ 0 & t \in (-\infty, x - \frac{1}{2n}) \cup (x + \frac{1}{2n}, +\infty). \end{cases}$$

设$f(x) \in C(\mathbb{R})$且$|x| \geq 1$时$f(x) = 0$. 令$f_n(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t) K_n(x,t)\,dt$. 证明: $f_n(x)$在$\mathbb{R}$一致收敛于$f(x)$.

七、令$\phi(u) := \int_0^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2} dx$, 其中$u$是非负实数。

(1) 证明: $\phi(u)$关于$u \in [0,+\infty)$是一致收敛的。

(2) 证明: $\phi(u)$在$[0,\pi]$上至少有一个零点。