一、填空（5×7）

1. $\mathbb{R}^{2\times2}$ 上线性变换 $\mathcal{A}(X)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}X^T$，$\mathcal{A}$ 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下矩阵：①＿＿＿＿

$\mathcal{A}$ 的最小多项式 $d_{\mathcal{A}}(x)=$ ②＿＿＿＿，E_{11} 生成的 $\mathcal{A}$ 循环子空间维数：③＿＿＿＿

2. 在 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 上定义内积 $(X,Y)=\mathrm{tr}\,X^T\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}Y$，$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的 Gram 方阵＝④＿＿＿＿，V 中与 $E_{11},E_{22},E_{12}+E_{21}$ 都正交的单位向量：⑤＿＿＿＿。

当且仅当 $B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ 满足 ⑥＿＿＿＿ 时，$\mathcal{B}(X)=BX$ 是正交变换。

3. 设实内积空间 $V=\{a+bx+cx^2\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ 的内积 $(f,g)=\int_{-1}^{1}fg\,dx$，V 上线性变换 $\mathcal{A}:f(x)\longmapsto f(x+1)$ 的伴随变换 $\mathcal{A}^*$ 在 $1,x,x^2$ 下矩阵表示＝⑦＿＿＿＿。

二、判断（7×3）

1. $\mathcal{A}\in L(V)$，U_1,U_2 为 $\mathcal{A}$ 循环子空间，则 $U_1\cap U_2$ 也是 $\mathcal{A}$ 循环子空间。

2. $\mathcal{A}\in L(V)$，对于任意 $\mathcal{A}$ 不变子空间 U_1，存在 $\mathcal{A}$ 不变子空间 U_2 使 $V=U_1\oplus U_2$

3. $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 为实内积空间 V 上的规范变换，则 $\mathcal{AB}$ 也是 V 上规范变换。

三、解答（10×3+14）

1. $\mathcal{A}\in L(V)$，$\mathcal{A}^{2017}=\mathcal{A}$。证：$V=\mathrm{Im}\,\mathcal{A}\oplus\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$。

2. 证：$\mathbb{R}^{2\times2}$ 上 $f(X,Y)=\mathrm{tr}\left(X^T\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}Y\right)$ 是内积。

3. 证：对实内积空间 V 的任意有限维子空间 U，$(U^\perp)^\perp=U$。

4. Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 上，$\mathcal{A}(X)=AX$，$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$。

(1) 证：$\mathcal{A}$ 正交，且为旋转 (2) 求 $\mathcal{A}$ 转轴方向和旋转角度。