

2017年秋季学期泛函分析(H)期末考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2018.01.09 08:30-10:30 主讲教师: 黄文

1. 证明Banach不动点定理(压缩映像原理).
2. 设 M 是 X 的子集, 若对任意 $f \in X^*$, 成立 $f(M)$ 有界, 求证 M 有界.
3. 设 X 是赋范线性空间, $\{f_n\}, f \in X^*$, 求证: $f_n \rightharpoonup^* f$, 当且仅当(1) $\|f_n\|$ 有界; (2)对任意 X 中的稠密子集 $M, \forall x \in M$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.
4. 设 $K(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i(x+y)}$, $\sum_n |a_n|^2 < \infty$. 求证:
(1)如下 T 是 $L^2[0, 1]$ 上的紧算子:

$$Tu(x) := \int_0^1 K(x, t)u(t)dt.$$

(2)计算 T 的谱.

5. 构造 $f \in (l^\infty)^*$, 使得对任意 $a \in l^\infty$, 都有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1}) \leq f(a) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1}).$$

6. 设 X 是Banach空间, Y 是有限维空间, $f : X \rightarrow Y$ 是线性算子, 求证: f 连续当且仅当 $N(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}$ 是闭集.
7. 设 A 是Hilbert空间 H 上的有界线性算子, 若 A 和任意紧算子 B 交换, 求证: $A = \lambda I$.