中国科学技术大学数学科学学院
2017年秋季学期期中考试试卷

课程名称 微分几何 课程编号 00101302

考试时间 2017年11月14日9:45-11:45 考试形式 闭卷

姓名________ 学号________ 学院________

题号									总分
得分									

请将答案写在答题纸上，本试卷和答题纸一并上交。

1. (20′) 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 为正则曲面片 M 的一个参数表示。任意给定一点 $p\in M$, 用 $\boldsymbol{n}$ 和 X 分别记该点处的单位长法向量和单位长切向量。

(1) X 和 $\boldsymbol{n}$ 张成一个平面，该平面与曲面 M 相截所得到的曲线记为 C. 解释曲面 M 沿方向向量X的法曲率 κ_X 的几何意义。

(2) 曲面 M 在 p 点处的两个主曲率记为 κ_1 和 κ_2. 叙述并计算法曲率 κ_X 的 Euler 公式。

(3) 设 $\boldsymbol{n}_\phi$ 为 p 点处的单位长向量，使得 $\langle \boldsymbol{n}_\phi, X\rangle=0$, 并且 $\boldsymbol{n}_\phi$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 ϕ, $0<\phi\leqslant\pi$. X 和 $\boldsymbol{n}_\phi$ 张成一个平面 Q，该平面与曲面 M 相截所得到的曲线记为 C_ϕ.

在平面 Q 上取定由 $\{X,\boldsymbol{n}_\phi\}$ 给出的定向。视 C_ϕ 为定向平面 Q 上的一条平面曲线，其曲率记为 κ_ϕ.

证明：$\kappa_X=\kappa_\phi\cdot\cos\phi$.

2. (20′) 如果一条曲线的切向量与一个固定的方向交成定角，则称该曲线为一般螺线。

(1) 证明：一条曲率处处非零的正则参数曲线是一般螺线当且仅当这条曲线的挠率与曲率的比值是常数。

(2) 设 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是一弧长参数曲线，用 $\kappa(s)$, $\tau(s)$ 分别表示曲线 C 的曲率和挠率，假定 $\kappa(s)$处处非零，用 $\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ 分别表示曲线 C 的单位长切向量和单位长副法向量。令 $\boldsymbol{\sigma}(s)=\tau(s)\boldsymbol{t}(s)+\kappa(s)\boldsymbol{b}(s)$.

证明：曲线 C 是一般螺线当且仅当向量 $\boldsymbol{\sigma}(s)$ 有固定的方向。

3. $(15')$ 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 为正则曲面片 M 的一个参数表示。用 $\boldsymbol{n}$ 记 M 的单位长法向量。曲面M的第三基本形式定义为 $\mathrm{III}:=\langle d\boldsymbol{n}, d\boldsymbol{n}\rangle$.

如果曲面 M 的高斯映射 $\boldsymbol{g}$ 为单射，则像集合 $\boldsymbol{g}(M)$ 为一正则曲面片。

证明：III 给出曲面 $\boldsymbol{g}(M)$ 的第一基本形式，$-\mathrm{III}$ 给出曲面 $\boldsymbol{g}(M)$ 的第二基本形式。

4. $(15')$ (1) 分别计算下列曲面的第一基本形式和高斯曲率。

(i) 旋转曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(u\sin v, u\cos v, \log u)$.

(ii) 正螺面 $\widetilde{\boldsymbol{r}}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, v)$.

(2) 给定两个正则曲面片，如果它们之间存在一个可逆映射，使得任意点的高斯曲率在该映射下保持不变。

问：第一基本形式在该映射下是否一定保持不变，并说明理由。

5. $(30')$ 对参数曲线 $C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, 其中 s 为弧长参数，用 $\kappa(s)$, $\tau(s)$ 分别表示曲线的曲率和挠率，假定 $\kappa(s)$处处非零，用 $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ 分别表示曲线 C 的单位长主法向量和单位长副法向量。那么方程

$$\boldsymbol{r}(s,\theta)=\boldsymbol{r}(s)+\lambda\left(\cos\theta\,\boldsymbol{n}(s)+\sin\theta\,\boldsymbol{b}(s)\right),\ \lambda>0\ \text{充分小},$$

给出了围绕曲线 C 的管状曲面 S.

(1) 求出曲面 S 的第一基本形式和第二基本形式。

(2) 求出曲面 S 的椭圆点、双曲点和抛物点。

(3) 求出曲面 S 的高斯曲率、平均曲率。

(4) 求出曲面 S 的主曲率以及对应的主方向。