2016 年实分析期中试题

整理： 张桐*

1、（15 分）

（a）若 f 是可测函数，证明：对任意的 $Borel$ 集 E，$f^{-1}(E)=\{x:f(x)\in E\}$ 是可测集。

（b）令 $\mathcal{C}$ 为 $Cantor$ 集，$\Phi:[0,1]\to\mathcal{C}$ 为单调递增且连续的双射。试构造一个 $Lebesgue$ 可测集，但它不是一个 $Borel$ 集。解释理由。

2、（15 分）

设 $f\in L^1(R)$ 满足：对任意 $x\in R$，f 在 0 和 x 之间的闭区间上积分为零。证明 $f=0.a.e.$。（注：请用实变函数知识加以证明）

3、（15 分）

设 f 和 g 为定义在可测集 $E\subset R^d$ 上的实值可测函数，且 $m(E)<+\infty$，令

$$\rho(f,g)=\int_E\frac{|f-g|}{1+|f-g|}.$$

证明：

（a）ρ 是定义在 E 上可测函数全体所构成的空间上的一个度量 ($metric$)。（注：尊重教材的约定，我们把几乎处处相等的可测函数看成一个元素）

（b）f_n 依此度量 ρ 收敛于 f，当且仅当 f_n 在 E 上依测度收敛于 f。

4、（15 分）

设 $f\in L^1(R^d)$。若对一切在 R^d 上有紧支集的连续函数 ϕ 都有：

$$\int f(x)\phi(x)dx=0,$$

证明：$f=0\ a.e.$

5、（15 分）控制收敛定理的推广：

若 $f_n,g_n,f,g\in L^1,f_n\xrightarrow{a.e.}f,g_n\xrightarrow{a.e.}g,|f_n|\le g_n,\&\int g_n\to\int g$。证明：$\int f_n\to\int f$。

6、（15 分）

设 $x\in R$，$\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$，是全部有理数组成的数列。证明下列级数几乎处处收敛：

$$(a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}$$

$$(b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n|x-r_n|}I_{(r_n-\frac{1}{2^n},r_n+\frac{1}{2^n})}(x)$$

注：(b) 中出现的 I 为特征函数；此题可以直接利用 $Borel-Cantelli$ 引理证明，即无需证明该引理。

7、（10 分）

已知 R^2 中的单位圆盘的 $Lebesgue$ 测度为 π，试证明：R^2 中任一开集 G 可以表示为 $G=(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}B_n)\cup Z$，其中 $\{B_n\}$ 是互不相交的开圆，$m(Z)=0$。

*mail:zt001062@mail.ustc.edu.cn phone:18856017324