2016 年实分析期中试题

整理： 张桐*

1、（15 分）

设 $\{E_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一列可数的 R^d 的可测子集列，满足

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k) < +\infty.$$

令

$$E = \{x \in R^d : x \in E_k, for\, infinite\, k\}$$

证明：E 为可测集且 $m(E) = 0$.

2、（15 分）

请问：一族可测集的交集必是可测集吗？证明或者举出反例。

3、（15 分）

设 $f \in C(R^1)$，g 是 R^1 上的可测函数。若对任意的零测集 Z，$f^{-1}(Z)$ 是可测集，试证明 $g(f(x))$ 是可测函数。

4、（15 分）

设 $E \in R^d$，$m(E) < +\infty$，$f_1, f_2 ... f_n ...$ 是 E 是几乎处处有限的实值可测函数，试证明：$\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f 的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{\alpha\to 0} \{\alpha + m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \alpha\})\} = 0$$

5、（15 分）

设 f 为定义在 R^d 上的函数，若对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $g, h \in L^1(R^d)$，满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x$，且使得

$$\int_{R^d} h(x) - g(x) dx < \epsilon.$$

试证明：$f \in L^1(R^d)$

6、（15 分）

已知 $f_n, f \in L^1(R^d)$，$f_n \to f a.e.$，且有 $||f_n||_{L_1} \to ||f||_{L_1}$，试证明：

（a）对任何可测集 $E \subset R^d$ 均有 $\int_E |f_n| \to \int_E |f|$

（b）$||f_n - f||_{L_1} \to 0$

7、（10 分）

设 $E \subset R^d$，$f \in L^1(E)$，且 $0 < A = \int_E f < +\infty$，试证明：存在 E 中的可测子集 e 使得

$$\int_e f = \frac{A}{3}$$

*mail:zt001062@mail.ustc.edu.cn phone:18856017324