2016年春季学期实分析(H)期中考试
参考解答

2016.4.19

1. 设f_n是一列$\mathbb{R}$上的可测函数, 对任意$x \in \mathbb{R}$, 若数列$\{f_n(x)\}$发散, 则称x为f_n的发散点. 证明:f_n的发散点集可测.

证法一： 注意到, 对任意固定的x, 数列$\{f_n(x)\}$收敛$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. 所以$\{f_n(x)\}$发散$\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0, \forall N, \exists m, n > N, |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon$. 这也等价于$\exists k \in \mathbb{N}, \forall N, \exists m, n > N, |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{k}$.

所以发散点集是

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

而全体f_n可测, 那么集合$\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{k}\}$ 可测. 而可测集的可列交、并仍可测, 所以f_n的发散点集可测.

证法二： 注意到f_n可测, 则$\limsup_n f_n(x), \liminf_n f_n(x)$可测, 于是$g(x) := \limsup_n f_n(x) - \liminf_n f_n(x)$可测. 而对固定的$x$, $\{f_n(x)\}$发散$\Leftrightarrow \limsup_n f_n(x) \neq \liminf_n f_n(x)$. 那么所求的发散点集即为

$$\{x : \limsup_n f_n(x) \neq \liminf_n f_n(x)\} = \{x : g(x) \neq 0\}$$

. 据g可测知, 发散点集是可测的. 证毕.

$\square$

注 若将“发散”理解为“发散到无穷”，则扣10分。若“发散的无穷”的点集也有地方写错了，那么扣分在15分左右.

2. 设$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{R}$, $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$是有界集合, 证明:

$$m^*(E) = \lim_{k \to \infty} m^*(E_k).$$

证明： 先证明一个引理(等测包的存在性)

引理 设$E \subseteq \mathbb{R}^d$测度有限, 那么则存在G_δ-集G, 使得$m^*(E) = m(G)$

注意到对任意k, 存在包含E的开集G_k, 使得$m(G_k) \leq m^*(E) + \frac{1}{k}$. 令$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, 则$E \subseteq G$且$m^*(E) = m(G)$. 引理证毕.

回到原题, 对任一E_k, 作其等测包$B_k, m^*(E_k) = m(B_k)$. 于是

$$\lim_k m^*(E_k) \leq m^*(E) = m^*(\liminf_k E_k) \leq m(\liminf_k B_k) \leq \liminf_k m(B_k) = \liminf_k m^*(E_k) \leq \limsup_k m^*(E_k).$$

而$\bigcup_k E_k$有界, $m^*(E_k)$单调, 所以$\lim_k m^*(E_k)$存在且有限. 从而上面的不等式中, 不等号都要变成等号, 这样也就证明了结论.

$\square$

注 只用一列开集O_k覆盖E_k是不能同时做到$m^*(O_k) \le m(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$与$\{O_k\}$单调上升的. 如果出现了类似这样的错误, 那么扣分较严重, 例如, 扣14分. 只做到"$\ge$", 得3-4分. 只做了可测的情形, 得1-3分.

3. 设$\{f_n\}$在$[0,1]$上a.e.收敛于f, 且对某个$r > 0$和任意n, 均有$\int_0^1 |f_n|^r dx \le M < \infty$. 证明:$\forall p \in (0,r), ||f_n - f||_p \to 0$.

证明: 据Egorov定理, $\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \subseteq [0,1]$. 在$A_\epsilon$上$f_n$一致收敛于$f$, 并且$m([0,1] - A_\epsilon) < \epsilon$.

一方面, A_ϵ上, 据一致收敛定义, $\forall \delta > 0, \exists N, n > N, |f_n(x) - f(x)| < \delta$. 于是就有

$$\int_{A_\epsilon} |f_n - f|^p dx \le m(A_\epsilon)\delta^p \le \delta^p.$$

另一方面,据Holder不等式,

$$\int_{[0,1]-A_\epsilon} |f_n - f|^p dx \le \left(\int_{[0,1]-A_\epsilon} |f_n - f|^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \cdot \left(\int_{[0,1]-A_\epsilon} 1dx\right)^{\frac{r-p}{r}} \le \epsilon^{\frac{r-p}{p}} \left(\int_0^1 2^r(|f_n|^r + |f|^r)dx\right).$$

据Fatou引理,

$$\int_0^1 |f|^r dx \le \liminf_n \int_0^1 |f_n|^r dx \le M.$$

所以

$$\int_{[0,1]-A_\epsilon} |f_n - f|^p dx \le \epsilon^{\frac{r-p}{r}} 2^p (2M)^{\frac{p}{r}}.$$

分别让δ, ϵ趋于0, 就得到$||f_n - f||_p \to 0$.

□

注 此题不能只用收敛定理，只用收敛定理的，扣分在12分以上，因为根本做不出来。如果用推广控制收敛定理，但仅是欠证$||f_n||_p \to ||f||_p$的，扣8分。此题不能证到$||f_n - f||_r \to 0$, 凡是以此命题为目标的，扣分在12分或15分以上。此题第二部分在A_ϵ补集上的积分估计不允许用积分的绝对连续性，因为绝对连续性里面的小量不是“一致的”，犯了这个错误的，扣5分左右。

4. 设$\{f_n\}, f$可测, 且

$$\forall \epsilon > 0, \lim_n m\{x : |f_n(x) - f(x)| \ge \epsilon\} = 0.$$

证明:$\{f_n\}$存在子列a.e.收敛到f.

证明: 据题设知, $\forall n$存在子列$\{k_n\}$,使得

$$m\{x : |f_{k_n}(x) - f(x)| \ge \frac{1}{n}\} \le \frac{1}{2^n}.$$

记上述集合为E_n, 那么就有$\sum_n m(E_n) < \infty$, 据Borel-Cantelli引理, $m(\limsup_n E_n) = 0$. 由第一题可知该集合就是f_{k_n}不收敛到f的点集, 从而$f_{k_n} \to f$, a.e. 证毕.

□

注 此题还有一种做法，与证明Vitali收敛定理类似, 对$M > 0$, 令$\Psi_M(x) = sgn(x)\min\{|x|, M\}$, 去证明$||\Psi_M(f_n) - \Psi_M(f)||_1 \to 0$, 这样就存在子列a.e.收敛, 再让$M$跑遍全体正整数, 用对角线法则取个子列即可。这样类似的做法只有一位同学做到了，值得表扬。另外，此题没取子列的，扣分在17分以上。此题取子列角标混乱、不统一的（注意证明过程里面子列的所有下标始终是跟着n变的），扣6-8分。子列取错的，扣12-15分。此题不收敛点上限集角标写错的，扣3-5分。直接证明L^1收敛的，扣16分以上，因为根本做不到。

5. 叙述Egorov定理，并说明为什么$m(E) = \infty$时不对.

证明: 设$m(E) < \infty$, f_n, f可测, 且$f_n \to f$,a.e. 那么$\forall \delta$, 存在集合$A_\delta \subset E$, 使得f_n在该集合上一致收敛到f, 而且$m(E - A_\delta) < \delta$. 叙述正确，得10分，把挖去的集合写成零测集，扣掉一半。

反例：例如$f_n = \chi_{[n,+\infty)}, f_n = \chi_{[n,n+1]}, f_n = \chi_{[0,n]}$等等，必须加以说明，否则扣分。