极限理论

§1. 大数定律

(一) 弱大数律. $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $E|X_1|<\infty$

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P} EX$$

·若二阶矩存在, 利用Chebyshev不等式

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-EX\right|\ge\varepsilon\right)\le \frac{Var(S_n/n)}{\varepsilon^2}=\frac{Var X}{n\varepsilon^2}\to 0$$

·若仅是一阶矩存在, 须用截断法

$$X=X1_{\{|X|\le N\}}+X1_{\{|X|>N\}}$$

$$S_n'=\sum_{i=1}^n X_i'=\sum_{i=1}^n X_i1_{\{|X_i|\le N\}}$$

$$S_n''=\sum_{i=1}^n X_i''=\sum_{i=1}^n X_i1_{\{|X_i|>N\}}$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-EX\right|>\varepsilon\right)\le \underbrace{P\left(\left|\frac{S_n'}{n}-EX'\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{①}+\underbrace{P\left(\left|\frac{S_n''}{n}-EX''\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{②}$$

$$① \le \frac{Var\left(\frac{S_n'}{n}\right)}{\varepsilon^2/4}=\frac{4EX^21_{\{|X|\le N\}}}{n\varepsilon^2}\qquad n\to\infty\ ①\to 0$$

② $\to 0$ as $N\to\infty$ (DCT)

$$② \le P\left(\left|\frac{S_n''}{n}\right|>\frac{\varepsilon}{4}\right)\le 4\frac{E|S_n''/n|}{\varepsilon}=\frac{4E|S_n''|}{n\varepsilon}$$

$$|S_n''|\le \sum_{i=1}^n |X_i''|\ \Rightarrow ② \le \frac{4E|X|1_{\{|X|>N\}}}{\varepsilon}$$

$n\to\infty$, 再 $N\to\infty$ 有 $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-EX\right|>\varepsilon\right)\to 0$ □

·令 $Y_k=X_k1_{\{|X_k|\le k\}}$ $\quad T_n=\sum_{k=1}^n Y_k$.

则 $\sum_{k=1}^\infty P(X_k\ne Y_k)=\sum_{k=1}^\infty P(|X_k|>k)$

$=\sum_{k=1}^\infty P(|X|>k)\le E|X|<\infty$.

由Borel-Cantelli引理. $P(X_k\ne Y_k\ i.o.)=0$.

$$\Rightarrow \frac{S_n-T_n}{n}\xrightarrow{a.s.}0$$

·若是二阶矩存在则可用 $Y_k=X_k1_{\{|X_k|\le\sqrt{k}\}}$ 截断.

以下只需证 $\frac{T_n}{n}\xrightarrow{P}EX$.

$$P\left(\left|\frac{T_n}{n}-\frac{ET_n}{n}\right|>\varepsilon\right)\le\frac{Var(T_n/n)}{\varepsilon^2}=\frac{\sum_{k=1}^n Var(Y_k)}{n^2\varepsilon^2}$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^n Var(Y_k)}{n^2\varepsilon^2}=\frac{\sum_{k=1}^n EY_k^2}{n^2\varepsilon^2}$$

∴只需证 $\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^n EY_k^2\to 0$.

$$\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^n EX^21_{\{|X|\le k\}}=\frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^N EX^21_{\{|X|\le N\}}}_{\to 0\text{ as } n\to\infty}+\underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{k=N+1}^n EX^21_{\{|X|\le k\}}}_{②}\Big)$$

$$② \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=N+1}^n E|X|\cdot k\cdot 1_{\{|X|\le k\}}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=N+1}^n E|X|\cdot n\,1_{\{N<|X|\}}\le E\left[X1_{\{N<|X|\}}\right]$$

$n\to\infty$. 再 $N\to\infty$ 有②→0

∴ $E|X|<\infty\Rightarrow \frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}EX$.

加强: $\exists b_n$ $\frac{S_n}{n}-b_n\xrightarrow{P}0\iff nP(|X|>n)\to 0$

此时令 $b_n=EX1_{\{|X|\le n\}}+o(1)$

pf: $\Leftarrow$: $X_{nk}=X_k1_{\{|X_k|\le n\}}$

$T_n=\sum_{k=1}^n X_{nk}$. $\mu_n=EX_{nk}$

∴只需证 $\frac{S_n}{n}-\mu_n\xrightarrow{P}0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu_n\right|>\varepsilon\right)\le P\left(\left|\frac{T_n}{n}-\mu_n\right|>\varepsilon\right)+P(S_n\ne T_n)$$

$$\le P\Big(\underbrace{\bigcup_{k=1}^n\{X_{nk}\ne X_k\}}_{\bigcup_{k=1}^n\{X_k>n\}}\Big)+P\left(\left|\frac{T_n}{n}-\mu_n\right|>\varepsilon\right)$$

$$\le\sum_{k=1}^n P(|X_k|>n)+\frac{Var\left(\frac{T_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\underset{iid}{=}nP(|X|>n)+\frac{EX_{n1}^2}{n\varepsilon^2}$$

$\to 0$ as $n\to\infty$

$\Rightarrow$: 须用对称化方法.

对称化不等式:

X, X' iid. $\forall x, a$. 有

$$\frac12 P(X-mX\ge x)\le P(X-X'\ge x)$$

$$\frac12 P(|X-mX|\ge x)\le P(|X-X'|\ge x)$$

$$\le 2P\left(|X-a|\ge\frac{x}{2}\right)$$

pf: $P(X-X'\ge x)$

$\ge P(X-mX\ge x,\ X'\le mX)$

$=P(X-mX\ge x)P(X'\le mX)$

$\ge\frac12 P(X-mX\ge x)$

同理也有:

$$\frac12 P(X-mX\le -x)\le P(X-X'\le -x)$$

$$\Rightarrow\frac12 P(|X-mX|\ge x)\le P(|X-X'|\ge x)$$

$$\le P\left(|X-a|\ge\frac{x}{2}\right)+P\left(|X'-a|\ge\frac{x}{2}\right)$$

$$\underset{X,X'\ iid}{\le}2P\left(|X-a|\ge\frac{x}{2}\right)$$

回到定理.

先对 对称的r.v. 证明:

引理: 设 $X_1 \dots X_n$ 独立、对称化 r.v.

则 S_n 对称, 且 $P(|S_n|>t) \geq \frac{1}{2} P(\max_{1\le j\le n} |X_j|>t)$

若 X_i 还同分布 则 $P(|S_n|>t) \geq \frac{1}{2}(1-\exp\{-nP(|X_1|>t)\})$.

先设引理正确.

设 $X': X_1' \dots X_n'$ 为 $X: X_1 \dots X_n$ 的独立复制.

$^\circ S_n := \sum_{i=1}^n (X_i - X_i')$.

$\Rightarrow$ 由 对称化不等式:

$$2\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - b_n\right| > \varepsilon\right) = 2\mathbb{P}(|S_n - nb_n| > n\varepsilon)$$

$$\geq \mathbb{P}(|^\circ S_n| > 2n\varepsilon)$$

$$\geq \frac{1}{2}(1-\exp\{-n\mathbb{P}(|X-X'|>2n\varepsilon)\})$$

$$\geq \frac{1}{2}(1-\exp\{-\frac{1}{2}n\mathbb{P}(|X|>2n\varepsilon+|mX|)\})$$

LHS $\to 0$.

$\Rightarrow n\mathbb{P}(|X|>2n\varepsilon+|mX|) \to 0$.

$\Updownarrow$

$n\mathbb{P}(|X|>n) \to 0$.

余下只用再证引理:

$L = \inf\{i : |X_i| = \max_{1\le j\le n} |X_j|\}$

$M = X_L$. $T = S_n - X_L$.

(M, T) 对称.

$$\mathbb{P}(M>t) = \mathbb{P}(M>t, T\geq 0) + \mathbb{P}(M>t, T<0)$$

$$= 2\mathbb{P}(M>t, T\geq 0)$$

$$\leq 2\mathbb{P}(M+T>t)$$

$$= 2\mathbb{P}(S_n>t) = \mathbb{P}(|S_n|>t)$$

若还有同分布.

则 $\mathbb{P}(\max_{1\le j\le n}|X_j|>t) = 1-\mathbb{P}(\max_{1\le j\le n}|X_j|\le t)$

$$= 1-\mathbb{P}(|X_j|\le t;\ 1\le j\le n)$$

$$= 1-\mathbb{P}(|X_1|\le t)^n$$

$$\geq 1-(1-\mathbb{P}(|X_1|>t))^n \geq 1-\exp\{-n\mathbb{P}(|X_1|>t)\}$$

□

对称化的例子.

先对称化, 再考虑条件概率!

eg: $e_1 \dots e_n$ iid, $\mathbb{E}e_i = 0$, $h_1 \dots h_n \in \mathbb{R}$

则 $|\mathbb{E}\sum_{i=1}^n h_i e_i| \le 2\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n |h_i| e_i|$

若 e_i 对称 则 $e_i h_i \overset{d}{=} e_i |h_i|$.

从而 ~~直接考虑~~ ε_i 对称r.v. 对.

令相互 e_i' iid, 与e_i独立. $e_i' - e_i \overset{d}{=} e_i - e_i'$

$$|\mathbb{E}\sum_{i=1}^n h_i e_i| = |\mathbb{E}\sum_{i=1}^n h_i (e_i - \mathbb{E}[e_i' | e_1 \dots e_n])|$$

$$= |\mathbb{E}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[h_i(e_i - e_i') | e_1 \dots e_n]|$$

$$= |\mathbb{E}\sum_{i=1}^n h_i(e_i - e_i')|$$

$$= |\mathbb{E}\sum_{i=1}^n |h_i| \cdot (e_i - e_i')|$$

$$\le \mathbb{E}|\sum_{i=1}^n |h_i|(e_i - e_i')|$$

$$\le 2\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n |h_i| e_i|.$$

□

反过来一步而.

Thm (Feller).

X_n 独立. $b_n \uparrow \infty$ 若

(1) $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(|X_i|>b_n) \to 0$

(2) $\frac{1}{b_n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2 1_{\{|X_i|\le b_n\}}] \to 0$.

$a_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} X_i 1_{\{|X_i|\le b_n\}}$ 有 $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

证: $X_{ni} = X_i 1_{\{|X_i|\le b_n\}}$. $T_n = \sum_{i=1}^n X_{ni}$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right)$$

$$\le \underbrace{\mathbb{P}(S_n \ne T_n)}_{\downarrow 0} + \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right)$$

$$\le \frac{\mathrm{Var}(T_n)}{\varepsilon^2 b_n^2} \overset{\text{iid}}{=} \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{b_n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2]_{\{|X_i|\le b_n\}}$$

$\to 0$.

必要性也对

□

对三角阵列 $X_1 \dots X_{1k_1}$ 各行中独立.

$\vdots$

$X_n \dots X_{nk_n}$

(1) $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{P}(|X_{nk}|>b_n) \to 0$

(2) $\frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E} Y_{nk}^2 1_{\{|X_{nk}|\le b_n\}} \to 0$

则 $\frac{\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} - \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{nk}1_{\{|X_{nk}|\le b_n\}}]}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. □

---

§1.2 强大数定律

· $Y_1, Y_2 \dots$ iid. $E|X_1|=\infty$ 则 $\mathbb{P}(|X_n|\ge n \text{ i.o.})=1$.

且 $S_n = Y_1+\dots+Y_n$. 则 $P(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \text{ 存} \in (-\infty,\infty))=0$.

证: $\mathbb{E}|X_1| = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1|>x)dx \le \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(|X_1|>n)$.
$\quad \| \; \infty$

由第二 B-C引理 $\mathbb{P}(|X_n|\ge n \text{ i.o.})=1$.

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_n}{(n+1)n} - \frac{X_{n+1}}{n+1}.$$

令 $C=\{w: \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} \exists \in(-\infty,\infty)\}$.

在 C上. $\frac{S_n}{n(n+1)}\to 0$. ∴在 $C\cap\{|X_n|\ge n \text{ i.o.}\}$

有 $\left|\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n+1}}{n+1}\right|>\frac{2}{3}$ i.o. 与 $w\in C$ 矛盾.

∴ 上述交为空. ∴ $\mathbb{P}(C)=0$ □

以上定理表明: $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\exists$, 必须要一阶矩收敛.

推广的 Borel-Cantelli 第二引理.

设 $A_1, A_2,\dots$ 两两独立. $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n)=\infty$.

则 $n\to\infty$ 时 $\frac{\sum_{k=1}^n 1_{A_k}}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)} \xrightarrow{a.s.} 1$.

从而第二B-C引理只须两两独立.

证明: $S_n=\sum_{k=1}^n 1_{A_k}$. $\mathbb{E}S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$.

尝试子列方法. 令 $n_k = \inf\{n: \mathbb{E}S_n \ge k^2\}$

则 $k^2 \le \mathbb{E}S_{n_k} \le k^2+1$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty P\left(\left|\frac{S_{n_k}-\mathbb{E}S_{n_k}}{\mathbb{E}S_{n_k}}\right|>\varepsilon\right) \le \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbb{E}S_{n_k}} \le \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\varepsilon^2 k^2}<\infty.$$

由 B-C 引理 $\frac{S_{n_k}}{\mathbb{E}S_{n_k}}\to 1$ a.s.

$\forall n_k\le n< n_{k+1}$.

$$\underbrace{\frac{\mathbb{E}S_{n_k}}{\mathbb{E}S_{n_{k+1}}}}_{\downarrow 1}\cdot\frac{S_{n_k}}{\mathbb{E}S_{n_k}} \le \frac{S_n}{\mathbb{E}S_n} \le \frac{S_{n_{k+1}}}{\mathbb{E}S_{n_k}} = \frac{S_{n_{k+1}}}{\mathbb{E}S_{n_{k+1}}}\cdot\underbrace{\frac{\mathbb{E}S_{n_{k+1}}}{\mathbb{E}S_{n_k}}}_{\downarrow 1}$$

∴ $\frac{S_n}{\mathbb{E}S_n}\xrightarrow{a.s.}1$ □

一般地, 可能须要截断, 使二阶矩存在.

下面证明强大数定律:

$X, X_1 \dots X_n$ iid. $\mathbb{E}|X|<\infty \Rightarrow \frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}X$.

证明: 只用证 X_n 非负的 Case. (否则拆成正、负部)

令 $Y_k = X_k 1_{\{|X_k|\le k\}}$

$\mathbb{P}(X_k\ne Y_k)=\mathbb{P}(|X_k|>k)=\mathbb{P}(|X|>k)$.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X_k\ne Y_k)\le\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(|X|>k)$
$\le \mathbb{E}|X|<\infty$

由第一 Borel-Cantelli 引理知

$\mathbb{P}(X_k\ne Y_k \text{ i.o.})=0$.

令 $T_n=\sum_{k=1}^n Y_k$. 从而 $\frac{S_n-T_n}{n}\xrightarrow{a.s.}0$.

余下只证: $\cancel{\frac{\mathbb{E}T_n}{n}\xrightarrow{a.s.}\mathbb{E}X}$

$\frac{T_n-\mathbb{E}T_n}{n}\to 0$ a.s.

采用子列方法: (为了凑出二阶矩)

对固定 $\alpha>1$. 令 $n_k=[\alpha^k]$

$$\forall\varepsilon>0, \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{n_k}-\mathbb{E}T_{n_k}}{n_k}\right|>\varepsilon\right)$$

$$\le \sum_{k=1}^\infty \frac{Var(T_{n_k})}{\varepsilon^2 n_k^2} = \sum_{k=1}^\infty\sum_{i=1}^{n_k}\frac{Var(X_i 1_{\{|X_i|\le i\}})}{\varepsilon^2 n_k^2}$$

$$= \sum_{k=1}^\infty\sum_{i=1}^{n_k}\frac{\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|<i\}}]}{n_k^2\varepsilon^2}$$

Toneli 引理

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}X^2 1_{\{|X|<i\}}\sum_{\{k: n_k\ge i\}}\frac{1}{n_k^2}$$

$$\sum_{\{k: n_k \ge i\}} \frac{1}{[\alpha^k]^2} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{[\alpha^k]^2}$$

$k_0 := \inf\{k : n_k \ge i\}$

$$\le \sum_{k \ge k_0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^k/2)^2} \lesssim \alpha^{-2k_0} \lesssim \frac{1}{i^2}.$$

$$\therefore \text{原式} \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X^2 1_{\{|X|<i\}}\right] \frac{1}{i^2}$$

$$= \mathbb{E}\left[X^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} 1_{\{|X|<i\}}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[X^2 \sum_{i=[|X|]+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\right]$$

$$\lesssim \mathbb{E}\left[X^2 \cdot \frac{1}{|X|}\right]$$

$$= \mathbb{E}|X| < \infty$$

由 Borel-Cantelli 引理.

$$\frac{T_{n_k} - ET_{n_k}}{n_k} \xrightarrow{a.s.} 0.$$

$$\Rightarrow \frac{T_{n_k}}{n_k} \xrightarrow{a.s.} \cancel{0}\ \mathbb{E}X.$$

$\forall n.\ \exists!\, k.\ n_k \le n < n_{k+1}.$

$$\underbrace{\frac{T_{n_k}}{n_k} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}}}_{\downarrow\ \frac{1}{\alpha}EX} \le \frac{T_n}{n} \le \frac{T_{n_{k+1}}}{n_k} = \underbrace{\frac{T_{n_{k+1}}}{n_{k+1}} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_k}}_{\downarrow\ \alpha EX}$$

令 $\alpha \to 1^+$ 有 $\cancel{\frac{T_n}{n}}$

$$EX \le \liminf_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} \le EX \quad a.s.$$

$$\Rightarrow \frac{T_n}{n} \xrightarrow{a.s.} EX$$

$$\Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} EX.$$

□.

Rmk: (1). 一阶矩存在时，一般作截尾.

若二阶矩存在，对X作 $Z_k = X_k 1_{\{|X_k| \le \sqrt{k}\}}$

及验证条件. 只需利用各种极大值不等式

~~(2). $X_1, \dots, X_n$ iid~~

Corollary:

(1) $X_1, \dots, X_n$ iid $\underbrace{EX_i^+ = \infty > EX_i^-}_{\text{拟可积}}$ 则 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \infty$

(2). $E|X| = \infty$ 则 $\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} = +\infty$.

证明: (1). 作截断. Fix $M > 0$. $X_i^M := X_i \wedge M$.

X_i^M iid. $E|X_i^M| < \infty$ 由强大数律.

$$\frac{S_n^M}{n} \xrightarrow{a.s.} EX_i^M.$$

由 $X_i \ge X_i^M$. $\therefore \mathbb{E}X_i^M \le \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.

由单调收敛定理. $\mathbb{E}X_i^{M+} \nearrow \mathbb{E}X_i^+ = \infty$

$$\mathbb{E}X_i^M = \mathbb{E}X_i^{M+} - \mathbb{E}X_i^{M-} \nearrow \infty$$

$\therefore \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \ge \infty$. 证毕

(2). 先证明: $\forall A > 0\ \mathbb{P}(|X_n| > An \text{ i.o.}) = 1$.

这因为 $E|X| = \infty \Rightarrow E\left|\frac{X}{A}\right| = \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{A}\right| > n\right) = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > An) = \infty$$

由二B-C引理 $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(|X_n| > An \text{ i.o.}) = 1\ \forall A$

而 $|X_n| > An \Leftrightarrow |S_n - S_{n-1}| > An$.

$$\Rightarrow |S_n| > \frac{An}{2} \text{ or } |S_{n-1}| > \frac{An}{2} > \frac{A(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \{|X_n| > An \text{ i.o}\}$$

$$\subseteq \left\{|S_n| > \frac{An}{2} \text{ i.o.}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(|S_n| > \frac{An}{2} \text{ i.o.}\right) = 1.$$

$$\therefore \forall A > 0\ \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} \ge \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} = \infty$$

□.

Thm: Glivenko-Cantelli 引理.

$X_1 \dots X_n$ iid $\sim F$. $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k \le x\}}$

则 $\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0$ a.s.

证明:

希望找一列点, 先对这列点证明, 再由

F 单调性证出 "sup" (一致性).

~~令 $Y_m = 1_{\{X_m \le x\}}$ iid. $E|Y_m| < \infty$~~

$\forall \varepsilon > 0$. 取一列 $x_0, x_1 \dots x_{n+1}$

$-\infty := x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} := +\infty$

s.t. $|F(x_{i+1}) - F(x_i)| < \varepsilon$.

$\exists \Omega_0$. 且 $P(\Omega_0) = 1$. 当 $w_0 \in \Omega_0$ 时.

$\forall i$, 都有 $F_n(x_i)(w) \to F(x_i)(w)$ $\forall w \in \Omega_0$.

$\therefore \exists n_0 = n_0(w)$. s.t. $n \ge n_0$ 时 $|F_n(x_i)(w) - F(x_i)(w)| < \varepsilon$.

$\forall x \in \mathbb{R}$. $\exists!\, i_0$ $x \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$

$F_n(x)(w) - F(x) \le F_n(x_{i_0+1}) - F(x_{i_0})$

$= F_n(x_{i_0+1}) - F(x_{i_0+1}) + F(x_{i_0+1}) - F(x_{i_0})$

$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

同样: $F_n(x) - F(x) \ge F_n(x_{i_0})(w) - F(x_{i_0+1}) > -2\varepsilon$

$\therefore \sup_x |F_n(x)(w) - F(x)| < \varepsilon$.

令 $\varepsilon \to 0^+$. 即可 □.

§1.3. 三级数定理.

· Def: $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ a.s. 收敛

$\Updownarrow$

$\exists \Omega$. $P(\Omega) = 1$. s.t. $\forall w \in \Omega$. $\sum_{k=1}^{\infty} X_k(w)$ 收敛.

$\Updownarrow$

$\exists S$ s.t. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \to S$ a.s.

回

Thm (Kolmogorov 0-1律). $X_1 \dots X_n$ 独立.

$\mathcal{G}_n := \sigma\{X_m;\, m \ge n\}$. $\mathcal{G} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. 为尾σ-代数.

则 $\forall A \in \mathcal{G}$. 有 $P(A) = 0$ or 1.

证明: $X_1 \dots X_n$ 与 $\mathcal{G}_n$ 独立 $\Rightarrow$ 与 $\mathcal{G}$ 独立. $\forall n$.

$\Rightarrow \sigma(X_1, X_2, \dots)$ 与 $\mathcal{G}$ 独立

$\Rightarrow \mathcal{G}$ 与 $\mathcal{G}$ 独立 $\Rightarrow$ A 与 A 独立.

$\Rightarrow P(A) = 0$ or 1. □

Rmk: (1) $\{\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ converges$\}$ 为尾事件

$P(\sum_{k=1}^{\infty} X_k \text{ converges}) = 0$ or 1.

$\therefore$ 要么 a.s. 收敛, 要么 a.s. 发散.

(2) 则 $\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = c\}$ 为尾事件

(3) 但 $\{\limsup_{n\to\infty} S_n = c\}$ 不是尾事件.

Thm (Kolmogorov 极大不等式).

$X_1 \dots X_n$ 独立. $EX_i = 0$ $\mathrm{Var} X_i < \infty$.

则 $P(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Var}(S_n)$

$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} EX_k^2$.

进一步地. 若 $|X_k| \le C < \infty$ 则有下界

$P(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \varepsilon) \ge 1 - \frac{(\varepsilon + C)^2}{\sum_{k=1}^{n} EX_k^2}$.

技巧: $T=\inf\{m: |S_m|\ge\varepsilon\}$

则 $\mathbb{P}(\max\limits_{1\le k\le n}|S_k|\ge\varepsilon)=\mathbb{P}(T\le n)$

$=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(T=k)$

$\le\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\frac{S_k^2 1_{\{T=k\}}}{\varepsilon^2}\right]$

欲证 $\le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[S_n^2 1_{\{T=k\}}]$

$=\frac{\mathbb{E}S_n^2 1_{\{T\le n\}}}{\varepsilon^2}$

check:

$\mathbb{E}[S_n^2 1_{\{T=k\}}]=\mathbb{E}[(S_k+(S_n-S_k))^2 1_{\{T=k\}}]$

$=\mathbb{E}S_k^2 1_{\{T=k\}}+\mathbb{E}(S_n-S_k)^2 1_{\{T=k\}}$

$+2\mathbb{E}[S_k(S_n-S_k)1_{\{T=k\}}]$ 二者独立. $E(S_n-S_k)=0$

$\ge\mathbb{E}S_k^2 1_{\{T=k\}}$.

∴上界得证;

对下界: 对k求和:

$\mathbb{E}[S_n^2 1_{\{T\le n\}}]=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\underset{\substack{(S_{k-1}+X_k)^2\\ \le\varepsilon\ \ \le C}}{S_k^2} 1_{\{T=k\}}]+\mathbb{E}[(S_k-S_n)^2 1_{\{T=k\}}]$

$\le(\varepsilon+c)^2\mathbb{P}(T\le n)+\mathbb{E}[S_n^2 1_{\{T\le n\}}]$ $=((\varepsilon+c)^2+\mathbb{E}S_n^2)\mathbb{P}(T\le n)$

又 $\mathbb{E}(S_n^2 1_{\{T\le n\}})=\cancel{(\varepsilon+c)^2\mathbb{P}(T\le n)}+\mathbb{E}S_n^2-\mathbb{E}S_n^2 1_{\{T>n\}}$

$=(\varepsilon+c)^2P(T\le n)+\mathbb{E}S_n^2-\varepsilon^2P(T>n)$.

$=(\varepsilon+c)^2\mathbb{P}(T\le n)+\mathbb{E}S_n^2-\varepsilon^2+\varepsilon^2\mathbb{P}(T\ge n)$.

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(T\le n)\ge\frac{\mathbb{E}S_n^2-\varepsilon^2}{(\varepsilon+c)^2+\mathbb{E}S_n^2-\varepsilon^2}=1-\frac{(\varepsilon+c)^2}{\mathbb{E}S_n^2}.$$

□.

Rmk: 刚才时做 极大不等式较精细.

Thm: $X, X_1,\dots X_n$ 独立 $EX=0$. $\sum_{k=1}^{\infty}EX_k^2<\infty$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\omega)$ a.s. 收敛.

证明: 只用证: $\max\limits_{k\ge n}|S_k-S_n|\xrightarrow{\mathbb{P}}0$.

$\forall m\in\mathbb{Z}_+$. $\mathbb{P}(\max\limits_{n\le k\le m}|S_k-S_n|\ge\varepsilon)\le\frac{\sum_{k=n}^{m}EX_k^2}{\varepsilon^2}$

Kolmogorov 极大不等式

令$m\to\infty$. 由单调收敛定理.

$\mathbb{P}(\max\limits_{k\ge n}|S_k-S_n|\ge\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n}^{\infty}EX_k^2$.

令$n\to\infty$ 有 右边 $\to0$.

$\therefore\max\limits_{k\ge n}|S_k-S_n|\xrightarrow{a.s.}0$.

□.

Thm (弱化的三级数定理).

设$\{X_n\}$独立. $\exists C>0$. $|X_n|\le C$ a.s.

(1) 若 $EX_n=0$. $\sum_{n=1}^{\infty}Var(X_n)=\infty$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ a.s. 发散.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ a.s. 收敛. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}X_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}Var X_n$ 收敛

证明: (1) $\mathbb{P}(\sup\limits_{1\le k\le m}|S_{n+k}-S_n|\ge\varepsilon)$

$\ge 1-\frac{(\varepsilon+c)^2}{ES_n^2=\infty}\to1$.

∴ $\{S_n\}$ 不是柯西列 a.s.

$\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ 发散 a.s.

(2). ~~反证: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}Var X_n$~~

若 $EX_n=0$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}EX_n=0$.

$\sum_{n=1}^{\infty}Var X_n<\infty$. 否则 由(1)知 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ a.s. 发散.

若 $EX_n\ne0$ 取 X_n 的独立复制 X_n'.

作对称化 $\tilde{X}_n=X_n-X_n'$.

$|\tilde{X}_n|\le2C$.

$E\tilde{X}_n=0$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}Var\tilde{X}_n<\infty$

$2\sum_{n=1}^{\infty}Var(X_n)$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n-EX_n$ a.s. 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ a.s. 收敛

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}EX_n$ a.s. 收敛

□

Thm: Kolmogorov 三级数定理

X_n 独立. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛当且仅当以下三条成立 $\forall c>0$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n|>c)<\infty$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n 1_{\{|X_n|\le c\}}]$ 收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} Var[X_n 1_{\{|X_n|\le c\}}]<\infty$

证明 $\Rightarrow$: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛

则 $X_n \to 0$ a.s.

$\therefore \forall c>0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n|>c)<\infty$

令 $Y_n = X_n 1_{\{|X_n|\le c\}}$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n\ne Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n|>c)<\infty$

$\therefore \mathbb{P}(X_n\ne Y_n\ i.o.)=0$, $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ a.s. 收敛

由弱化的三级数定理知

(2), (3) 收敛.

$\Leftarrow$: 若 (1) ~ (3) 收敛

仍记 $Y_n = X_n 1_{\{|X_n|\le c\}}$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} Var(Y_n)<\infty$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n - EY_n$ a.s. 收敛

又 $\sum_{n=1}^{\infty} EY_n$ a.s. 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ a.s. 收敛

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n|>c) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n\ne Y_n)<\infty$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛. □

Rmk: 为证 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛

(1) (一级数定理). $EX_n=0$, $\sum_{n=1}^{\infty} Var X_n<\infty \Rightarrow \sum X_n$ a.s. 收敛

(2) (二级数定理) EX_n 有. $\left.\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty} Var X_n<\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} EX_n \text{ 收敛}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛

(3) (三级数定理). 否则

下面希望借三级数定理导出强大数律. 为此我们先证一个引理

Lemma (Kronecker). 设 $b_n \nearrow +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{b_n}$ 收敛. 则

$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 0$ as $n\to\infty$

证明: 令 $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{b_k}$. 则 $\exists a\in\mathbb{R}$. $a_n\to a$ a.s.

$\frac{X_n}{b_n} = a_n - a_{n-1}$

$= \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k(a_k - a_{k-1})$ (Abel 求和)

$= a_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=2}^{n}(b_k - b_{k-1})a_{k-1}$

$\to a - a = 0$

□

Rmk: 常考虑 $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$

$\frac{S_n - a_n}{b_n} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \frac{a_n}{n}) \Big/ b_n$

由 Kronecker 引理. 只需证 $\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - \frac{a_n}{n}}{b_i}$ a.s. 收敛

这可由三级数定理得出.

但即使强大数律中, $\sum \frac{X_i}{i}$ 也可能发散 a.s.

此时考虑, 可以使用截断.

Thm (强大数定律)

$X, X_1, X_2, \dots$ iid. 则

$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.} 0 \iff EX=0$. $E|X|<\infty$

证明 $\Rightarrow$: $\frac{X_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n}$

$= \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} \to 0$ a.s.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|\frac{X_n}{n}|>\varepsilon)<\infty$ $\forall \varepsilon>0$

$\Rightarrow E|X|<\infty$. $EX=0$

$\simeq \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|\frac{X}{n}|>\varepsilon)$

$\Leftarrow$: 由 Kronecker 引理, 只需证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}$ a.s. 收敛

于是由 Kolmogorov 三级数定理, 只需证:

① $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_k|>k)<\infty$

② $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[\frac{X_k}{k}1_{\{|X_k|\le k\}}]$ 收敛

③ $\sum_{k=1}^{\infty} Var[\frac{X_k}{k}1_{\{|X_k|\le k\}}]<\infty$

Check: ① $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_k|>k)$

$= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X|>k) \le E|X|<\infty$

③: $\sum_{k=1}^{\infty} Var[\frac{X_k}{k}1_{\{|X_k|\le k\}}]$

$\le \sum_{k=1}^{\infty} E[\frac{X^2}{k^2}1_{\{|X|\le k\}}]$

$\overset{\text{Tonelli}}{=} \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X^2}{k^2}1_{\{|X|\le k\}}]$

$= \mathbb{E}[\sum_{k=[|X|]+1}^{\infty}\frac{X^2}{k^2}]$

$\lesssim E|X|<\infty$

② $\sum E[\frac{X_k}{k}1_{\{|X_k|\le k\}}]$ 不是绝对收敛, 不能直接换序

于是考虑截断

令 $Y_k = X_k 1_{\{|X_k|\le k\}}$

由 ① 知 $\sum_{k=1}^{\infty} Var(\frac{Y_k}{k}) < \infty$

而 $\mathbb{E}[Y_k - \mathbb{E}Y_k] = 0$. 由一级数定理

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k - \mathbb{E}Y_k}{k} \quad a.s. \text{ 收敛}$$

由 Kronecker 引理

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k - \mathbb{E}Y_k}{n} \to 0 \quad a.s \quad as\ n\to\infty.$$

又 $\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}Y_k}{n} \to 0. \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{n} \to 0 \ a.s$

$\sum_{k=1}^{\infty} P(X_k \neq Y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_k| > k)$

$\leq E|X| < \infty$

由第一 Borel-Cantelli 引理知 $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{n} \to 0 \ a.s.$

□

Rmk: 证明级数计算的经典方法 ②, 常用截断法.

Thm (Marcinkiewicz-Zygmund 强大数律)

$X, X_1, X_2 \ldots$ iid. 则:

$\exists a \in \mathbb{R}$. $\frac{S_n - an}{n^{1/r}} \to 0 \ a.s. \Leftrightarrow E|X|^r < \infty$.

其中 $a = \begin{cases} EX & 1 \leq r < 2 \\ \text{任一实数} & 0 < r < 1 \end{cases}$

证明: $\Rightarrow$: $\frac{X_n}{n^{1/r}} = \frac{S_n - an}{n^{1/r}} - \frac{S_{n-1} - (n-1)a}{n^{1/r}} + \frac{a}{n^{1/r}}$

$\to 0 \ a.s.$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n|^r > n) < \infty$

~~由 Borel-Cant~~ $\Rightarrow E|X|^r < \infty$

$\Leftarrow$: 考虑 $r \neq 1$.

~~$1<r<2$: 不妨 $EX=0$. 则 要证 $\frac{S_n}{n^{1/r}} \to 0$ a.s~~.

由三级数定理. 只需证

① . $\sum_n P(|X_n| > n^{\frac{1}{r}}) < \infty$

② $\sum_n \mathbb{E}[\frac{X_n}{n^{1/r}} I_{\{|X_n| \leq n^{\frac{1}{r}}\}}]$ 收敛.

③ $\sum_n Var[\frac{X_n}{n^{1/r}} I_{\{|X_n| \leq n^{\frac{1}{r}}\}}] < \infty$

先证 ① ③;

①: $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > n^{\frac{1}{r}}) = \sum_n P(|X|^r > n) \leq E|X|^r < \infty$

③: $LHS \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\frac{X_n^2}{n^{2/r}} I_{\{|X_n| \leq n^{\frac{1}{r}}\}}]$

$= \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^2}{n^{2/r}} I_{\{|X_n| \leq n^{\frac{1}{r}}\}}]$

$= \mathbb{E}[\sum_{n \geq |X|^r} X^2 / n^{2/r}] \lesssim \mathbb{E}[X^2 \cdot \frac{1}{|X|^{2-r}}] = \mathbb{E}[|X|^r] < \infty$

对②.

$0 < r < 1$

$\sum |\mathbb{E}\frac{X_n}{n^{1/r}} I_{\{|X_n| \leq n^{1/r}\}}| \leq \sum \mathbb{E}\frac{|X|}{n^{1/r}} I_{\{|X| \leq n^{1/r}\}}$

$= \mathbb{E}[|X| \sum_{n \geq |X|^r} n^{-\frac{1}{r}}]$

$= \mathbb{E}[|X| \, |X|^{r(1-\frac{1}{r})}] = \mathbb{E}|X|^r < \infty$

$1 < r < 2$. 不妨 $EX_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}[\frac{X_n}{n^{1/r}} I_{\{|X_n| \leq n^{\frac{1}{r}}\}}]|$ 　 $\overset{EX_n=0}{=}$ $|\mathbb{E}[\frac{X_n}{n^{1/r}} I_{\{|X_n| \leq n^{\frac{1}{r}}\}}]|$

$= |\mathbb{E}[\frac{X_n}{n^{1/r}} I_{\{|X_n| > n^{\frac{1}{r}}\}}]|$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\frac{|X_n|}{n^{1/r}} I_{\{|X_n| > n^{\frac{1}{r}}\}}]$

$= \mathbb{E}[|X| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{r}} I_{\{|X| > n^{\frac{1}{r}}\}}]$

$= \mathbb{E}|X| \cdot |X|^{r(1-\frac{1}{r})} = \mathbb{E}|X_n|^r < \infty$.

□

进一步我们考虑收敛速率.

$EX = 0$ 　 $X, X_1, \ldots X_n \ldots$ iid

- $E|X| < \infty \Rightarrow S_n = o(n)$ a.s.
- $E|X|^r < \infty$. $1 < r < 2 \Rightarrow S_n = o(n^{\frac{1}{r}})$ a.s.
- $EX^2 < \infty \Rightarrow S_n \overset{d}{=} O(\sqrt{n})$ (CLT)

(1) $\frac{S_n}{\sqrt{n}(\log n)^{1+\varepsilon}} \xrightarrow{a.s} 0$

$\Uparrow$ Kronecker 引理

$\sum_n \frac{X_n}{\sqrt{n}(\log n)^{1+\varepsilon}}$ a.s. 收敛

$\Uparrow$ ~~Kron~~

$\sum_n \frac{X_n^2}{n(\log n)^{1+\varepsilon}} < \infty$

(2). Hartman-Wintner 重对数律

$EX = 0$. $EX^2 = \sigma^2 < \infty$

则 $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log\log n}} = \sigma$ a.s.

证明见林正炎的书

从而 $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty$ a.s.

$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$ a.s

$\liminf_{n\to\infty} |\frac{S_n}{\sqrt{n}}| = 0$ a.s. 因集 $\frac{S_n}{\sqrt{n}} < \frac{S_n}{n^{\ldots}}$

用下极限的定义得

□

Thm: $\{X_n\}$独立，$\{g_n(x)\}$为正值偶函数序列，在$x>0$时不减，且满足以下条件之一：

(1) $x>0$时，$\frac{g_n(x)}{x}$不增.

(2) $x>0$时 $\frac{x}{g_n(x)}$，$\frac{g_n(x)}{x^2}$ 不增.

若存在 $a_n \uparrow \infty$ s.t. $\sum_n \frac{\mathbb{E}[g_n(X_n)]}{g_n(a_n)}<\infty$.

且当$g_n(x)$满足(2)时有$EX_n=0$，则 $\frac{S_n}{a_n}\longrightarrow 0$ a.s.

证明：只用证 $\sum_n \frac{X_n}{a_n}$ a.s. 收敛.

$\Updownarrow$

① $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n|>a_n)<\infty$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{a_n} 1_{\{|X_n|\le a_n\}}\right]$ 收敛

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left[\frac{X_n}{a_n} 1_{\{|X_n|\le a_n\}}\right]<\infty$

①：左 $\le \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)} 1_{\{|X_n|\le a_n\}}\right]<\infty$

③：$|x|\le a_n$时 $\frac{x^2}{a_n^2}\le\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}$

$\therefore LHS \le \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\frac{X_n^2}{a_n^2} 1_{\{|X_n|\le a_n\}}\right]$

$\le \sum \mathbb{E}\left[\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}\right]<\infty$

②：

Case (1): $\sum_n \left|\mathbb{E}\frac{X_n}{a_n} 1_{\{|X_n|\le a_n\}}\right|$

$\le \sum_n \mathbb{E}\frac{|X_n|}{a_n} 1_{\{|X_n|\le a_n\}}$

$\le \sum_n \mathbb{E}\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}<\infty$

Case (2): $\sum_n \left|\mathbb{E}\frac{X_n}{a_n} 1_{\{|X_n|\le a_n\}}\right|$

$\overset{EX_n=0}{=} \sum_n \left|\mathbb{E}\frac{X_n}{a_n} 1_{\{|X_n|>a_n\}}\right|$

$\le \sum_n \mathbb{E}\frac{|X_n|}{a_n} 1_{\{|X_n|>a_n\}} \le \sum_n \frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}<\infty$

□

§1.4. Lévy不等式, Hoeffding不等式

1. Lévy不等式：$\{X_k\}$独立，则$\forall x>0$ 有

$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} S_k + \underbrace{m}_{\text{中位数}}(S_n-S_k) > x\right) \le 2\mathbb{P}(S_n > x)$.

$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n} |S_k + m(S_n-S_k)| > x\right) \le 2\mathbb{P}(|S_n| < x)$

Pf: 令 $T=\inf\{k: S_k + m(S_n-S_k) > x\}$

$LHS=\mathbb{P}(T\le n)=\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T=k) \le \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T=k)\cdot 2\mathbb{P}(S_n-S_k\ge m(S_n-S_k))$

$=2\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T=k,\ \mathbb{P}(S_n-S_k)\ge m(S_n-S_k)) \le 2\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T=k,\ S_n>x) \le 2\mathbb{P}(S_n>x)=RHS$.

Corollary: $EX_n^2<\infty$，$EX_n=0$ 则有 $\mathbb{P}(\max S_k \ge x)$

$\le 2\mathbb{P}\left(S_n > x-\sqrt{2\sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k^2}\right)$

证：只用证 $|m(S_n-S_k)| \le \sqrt{2\sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k^2}$

这等价于 $\mathbb{P}\left(|S_n-S_k| \ge \sqrt{2\sum_k \mathbb{E}X_k^2}\right)\le\frac{1}{2}$

而这由Chebyshev不等式可得.

应用：$\{X_n\}$独立，则 $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} S \iff S_n \xrightarrow{a.s.} S$.

证：$\Rightarrow$ $S_n\xrightarrow{\mathbb{P}} S$，则$\exists$子列 n_k，$\mathbb{P}(|S_n-S_{n_k}|>2^{-k}) < 2^{-k}$ $\forall n>n_k$.

由B.C.引理 $\mathbb{P}(|S_{n_{k+1}}-S_{n_k}|>2^{-k}\ i.o.)=0$.

$\Rightarrow S_{n_k}\longrightarrow S$ a.s.

$\sum_k \mathbb{P}\left(\max_{n_k\le n<n_{k+1}} |S_n-S_{n_k}+m(S_{n_{k+1}}-S_n)|>2^{-k}\right)$

$\overset{\text{Lévy不等式}}{\le} 2\sum_k \mathbb{P}(|S_{n_{k+1}}-S_{n_k}|>2^{-k})<\infty$.

由B.C.引理，

$\max_{n_k\le n<n_{k+1}} |S_n-S_{n_k}+m(S_{n_{k+1}}-S_n)| \longrightarrow 0$

若有 $m(S_{n_{k+1}}-S_n)\to 0$，即有 $S_n\xrightarrow{a.s.} S$

而由 $S_n\xrightarrow{\mathbb{P}} S$

$\forall \varepsilon>0$，$\max \mathbb{P}(|S_{n_{k+1}}-S_n|>\varepsilon)\to 0$ as $k\to\infty$

$\therefore \exists k_0$，$k>k_0$时 $\mathbb{P}(|S_{n_{k+1}}-S_n|>\varepsilon)<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow |m(S_{n_{k+1}}-S_n)|<\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$

$\therefore$ 只能为0

□.

Prop: $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.} 0 \iff \begin{cases}\frac{S_{2^n}}{2^n}\to 0 \text{ a.s.}\\ \frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}} 0\end{cases}$

证明：由Lévy不等式

$\sum_k \mathbb{P}\left(\max |S_n-S_{2^k}+m(S_{2^{k+1}}-S_n)| \ge 2^k\varepsilon\right)$

$\le 2\sum_k \mathbb{P}(|S_{2^{k+1}}-S_{2^k}|\ge 2^k\varepsilon)<\infty$

由Borel-Cantelli引理，

$\frac{\max |S_n-S_{2^k}+m(S_{2^{k+1}}-S_n)|}{2^k} \xrightarrow{a.s.} 0$.

故至证明：$\frac{m(S_{2^{k+1}}-S_{2^n})}{2^k}\to 0$ a.s.

而 $\mathbb{P}(|S_{2^{k+1}}-S_n|>2^k\varepsilon)$.

$\le \mathbb{P}(|S_{2^{k+1}}|>2^k\cdot\frac{\varepsilon}{2})+\mathbb{P}(|S_n|>2^k\frac{\varepsilon}{2})$

$<\frac{1}{2}$. $\left(\mathbb{P}\left(|S_k|>\frac{k\varepsilon}{4}\right)<\frac{1}{4}\right)$. done.

$\square$

Thm: Hoeffding 不等式.

设 $\{X_i\}$ 独立. $\mathbb{P}(X_i\in[a_i,b_i])=1$. $\forall x>0$.

有 $P(S_n-\mathbb{E}S_n\ge xn)\le\exp\left\{-\frac{2n^2x^2}{\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)^2}\right\}$

证明: 不妨设 $ES_n=0$. ($EX_i=0$). $\forall t>0$.

$$\mathbb{P}(S_n\ge xn)=\mathbb{P}(e^{tS_n}\ge e^{tnx})$$

$$\le e^{-tnx}\mathbb{E}[e^{tS_n}]$$

$$=e^{-tnx}\prod_{i=1}^n e^{tX_i}$$

$\forall x_i\in[a_i,b_i]$. $e^{tx}=e^{t(\gamma b_i+(1-\gamma)a_i)}$

$$\le\gamma e^{tb_i}+(1-\gamma)e^{ta_i}.$$

$$=\frac{x-a_i}{b_i-a_i}e^{tb_i}+\frac{b_i-x}{b_i-a_i}e^{ta_i}$$

$$\mathbb{E}e^{tX_i}\le\frac{-a_i}{b_i-a_i}e^{tb_i}+\frac{b_i}{b_i-a_i}e^{ta_i}$$

$$=(1-\theta+\theta e^{t(b_i-a_i)})e^{-\theta t(b_i-a_i)}.\quad \theta=-\frac{a_i}{b_i-a_i}$$

$g(u)=\log((1-\theta+\theta e^u)e^{-\theta u})$.

$g(0)=g'(0)=0$. $g''(u)<\frac{1}{4}$ $g(u)\le\frac{u^2}{8}$.

$\therefore \mathbb{E}e^{tX_i}\le\exp\{\frac{t^2}{8}(b_i-a_i)^2\}$

$P(S_n\ge nx)\le\exp\{-tnx+\frac{t^2}{8}\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)^2\}$.

$t=\frac{4nx}{\sum(b_i-a_i)^2}$.

$$\mathbb{P}(S_n\ge nx)\le\exp\left\{-\frac{2n^2x^2}{\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)^2}\right\}$$

$\square$.

§2 中心极限定理

§2.1. 回顾

Recall:

1. $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow F_n \xrightarrow{d} F$
$\Leftrightarrow \forall x \in C(F).\ F_n(x) \to F(x)$.

2. Skorohod 嵌入: $F_n \Rightarrow F_\infty$ 则 $\exists Y_n$ on $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$.
s.t. $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y_\infty$, $Y_n \sim F_n$.

Rmk: 不考虑 r.v. 之间的关系时, a.s. 与依分布收敛几乎一样

3. $X_n \xrightarrow{d} X_\infty \Leftrightarrow \forall f \in C_b(\mathbb{R}).\ \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X_\infty)]$
$\Leftrightarrow \forall f \in C_b(\mathbb{R}).\ \int f(x)\,dF_n \to \int f(x)\,dF_\infty$

4. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.
$X_n \xrightarrow{d} c \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$. 从而可以用 ch.f 证 WLLN.

5. Slutsky 定理: $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b$, $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.
则 $X_n Y_n + Z_n \xrightarrow{d} bX + c$

eg: $X, X_1, X_2 \ldots$ i.i.d. $\mathbb{E}X = 0$. $\mathrm{Var}\,X < \infty$

则 $$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Pf: $$\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n\,\mathrm{Var}\,X}} \cdot \frac{\sqrt{n\,\mathrm{Var}X}}{\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}} \xrightarrow[d]{\text{slutsky}} N(0,1)$$
第一个因子 $\xrightarrow{d} N(0,1)$, 第二个因子 $\to 1$. □

Thm: (Helly Selection Thm).
$\{F_n\}$ d.f. 则 $\exists$ 子列 $\{F_{n_k}\}$ 及单增右连续函数 F s.t. $F_{n_k}(x) \to F(x)$. $\forall x \in C(F)$. (又称 F_n 淡收敛于 F) □

Rmk: (1). F is d.f. $\Leftrightarrow F_n$ 一致胎紧
$\Leftrightarrow \sup_n \mathbb{P}(|X_n| > u) \to 0$ as $u \to \infty$

(2) $F_n \xrightarrow{d} F$: $\begin{cases} \text{任一收敛子列的极限相同} \\ F_n \text{一致胎紧} \end{cases}$

Thm. 矩方法: 设 F 的任意阶矩都存在, 且 F 可由矩唯一确定.
设 X_n r.v. $\mathbb{E}X_n^m \to \int x^m dF$ $\forall m$. 则 $X_n \xrightarrow{d} F$

证明: 由 Helly 选择定理 $\forall$ 子列 n_k
$\exists \{n_{k_l}\} \subset \{n_k\}$. 以及不减右连续函数 G s.t. $X_{n_{k_l}} \xrightarrow{v} G$.

① G 为 d.f. 因 $\sup_n \mathbb{P}(|X_n| \geq M) \to 0$ as $M \to \infty$
$\le \frac{1}{M^2}\sup_n \mathbb{E}X_n^2$

$\therefore G$ 胎紧.

$\therefore X_{n_{k_l}} \xrightarrow{d} G$.

② $G = F$. 因 $\left.\begin{array}{l} X_{n_{k_l}} \xrightarrow{d} G \\ \{X_{n_{k_l}}^m\} \text{一致可积} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}X_{n_{k_l}}^m \to \int x^m dG$

$\therefore \int x^m dG \to \int x^m dF$ $\forall m$ $\therefore F = G$. □

Rmk: (1). $N(0,1)$ 可由矩唯一确定
(2) 有些分布不能.

例: X_p 表示参数为 p 的 Bernoulli 试验中首次成功所需的次数. 则 $pX_p \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(1)$. as $p \to 0$

证: $P(X_p > n) = \mathbb{P}(\text{前 } n \text{ 次都不成功})$
$= (1-p)^n$. 几何分布

$\mathbb{P}(pX_p \le n) = \mathbb{P}(X_p \le [\frac{n}{p}])$
$= 1 - (1-p)^{[x/p]} \to 1 - e^{-x}$ as $p \to 0$ □

· Scheffe 定理:

X_n 有密度 p_n. 若 $\forall x \in \mathbb{R}$. $p_n(x) \to p_\infty(x)$
则 $X_n \xrightarrow{d} X_\infty$.

证明: $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$|F_n(x) - F_\infty(x)| = \left|\int_{-\infty}^x p_n(y) - p_\infty(y)\,dy\right|$$
$$\le \int_{-\infty}^x |p_n(y) - p_\infty(y)|\,dy$$
$$\overset{|x| = 2x^+ - x}{=} 2\int_{-\infty}^{\infty} (p_\infty(y) - p_n(y))^+\,dy$$
$$\xrightarrow{DCT} 0$$
□

eg: $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$ iid $\sim U(0,1)$

V_{n+1} 为第n+1个次序统计量.

$Y_n := (2V_{n+1}-1)\sqrt{2n} \xrightarrow{d} N(0,1)$

证明: $\mathbb{P}(V_{n+1}\in(x, x+dx))$

$= (2n+1)\binom{2n}{n} x^n (1-x)^n dx$

$p_{Y_n}(x) = p_{V_{n+1}}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{2n}}\right)\frac{1}{2\sqrt{2n}}$

$= (2n+1)\binom{2n}{n} 4^{-n}\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^n \frac{1}{2\sqrt{2n}}$

$\binom{2n}{n}\sim\frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

□

Portmanteau 定理.

X, X_n r.v. 则以下命题等价

(1) $X_n \xrightarrow{d} X_\infty$

(2) ∀开G $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n\in G)\ge \mathbb{P}(X_\infty\in G)$

(3) ∀闭F $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n\in F)\le \mathbb{P}(X_\infty\in F)$

(4) ∀Borel set E 若 $\mathbb{P}(X_\infty\in\partial E)=0$

则 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n\in E) \overset{\exists}{=} \mathbb{P}(X_\infty\in E)$

□

§2.2 特征函数与中心极限定理.

一般仅对r.v. 有用.

Prop: $\varphi(t)=\mathbb{E}[e^{itX}]$ 则

(1) $|\varphi(t)|\le 1=\varphi(0)$, $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$

(2) ~~$|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = |\mathbb{E}$~~

一致连续

(3) 非负定. $\forall (t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$

则 $\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n \varphi(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j}\ge 0$

(4) $\varphi_{aX+b}(t)=e^{itb}\varphi_X(at)$

(5) X,Y 独立. $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

(6) f, g ch.f ⇒ fg is ch.f

从而 f为ch.f ⇒ $|f|^2$为ch.f. X, X' iid 则 X−X' 的ch.f 为 $|f|^2$

(7) f_i 为 ch.f $\{c_i\}_1^n\in\mathbb{R}^n$ $\sum_1^n c_i=1$

则 $\sum c_i f_i$ ch.f. 如 $\sum c_i F_i(x)$ (d.f.) 对应.

(8) X的ch.f 为实 则 φ实值 ⟺ X对称

例子:

	pdf	ch.f
U[-a,a]	$\frac{1}{2a}$	$\frac{\sin at}{at}$
三角形分布	$\frac{a-\lvert x\rvert}{a^2}$	a=1, ch.f. $\frac{2(1-\cos t)}{t^2}$
正态	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	
Cauchy分布	p $\frac{a}{\pi(a^2+(x-b)^2)}$	
Polya分布	$p(x)=\frac{1-\cos x}{\pi x^2}$	ch.f $(1-\lvert t\rvert)^+$

Thm (Parseval 等式). $X\sim F_X, f_X$; $Y\sim F_Y, f_Y$ 则 $\int f_X dF_Y=\int f_Y dF_X$

证: $\mathbb{E}[e^{iXY}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{iXY}|X]]$

$=\mathbb{E}[f_Y(X)]$

$=\int f_Y(x)\,dF_X(x)$

$=\int f_X(y)\,dF_Y(y)$. □

若 $Y\sim N(0,\sigma^2)$, 由Parseval等式即有

$\int f_X(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = \int e^{-\frac{\sigma^2x^2}{2}}dF_X(x)$.

若 X ~ F d.f., Y ~ p pdf ⇒ X+Y has pdf p * dF.

设 $Z\sim N(0,1)$, 则 $p_{X+\frac{Z}{\sigma}}(0)=\int\frac{e^{-\frac{\sigma^2x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}/\sigma}dF_X(x)$.

$p_{X+\frac{Z}{\sigma}}(0)=\frac{1}{2\pi}\int f_X(t)e^{-t^2/2\sigma^2}dt$.

ch.f 的平移, 而 $p_{X+\frac{Z}{\sigma}}(x)=p_{X-x+\frac{Z}{\sigma}}(0)$

$=\frac{1}{2\pi}\int f_X(t)e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt$.

① $f_X(t)=f_Y(t)$ ⇒ $X\overset{d}{=}Y$ □

② $\forall g\in C_b(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}g(X)=\lim_{\sigma\to\infty}\mathbb{E}\,g(X+\frac{Z}{\sigma})$

□

并设 $\int |f_X(t)| dt < \infty$

则 $\frac{1}{2\pi}\int f_X(t) e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$

$\xrightarrow{DCT} \frac{1}{2\pi}\int f_X(t) e^{-itx} dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int f_X(t) e^{-itx} dt =: p(x)$.

$\forall$ 有界闭区间 I. $\mathbb{P}(X\in I) = \lim_{\sigma\to\infty} \mathbb{P}(X + \frac{Z}{\sigma} \in I)$

$\overset{DCT}{=} \int_I p(x)\, dx$.

$\therefore$ 若 $\int |f_X(t)| dt < \infty$ 则 $X \sim p(x) = \frac{1}{2\pi}\int f_X(t) e^{-itx} dt$

ch.f. $L^1 \Rightarrow$ pdf exists □

· Lévy 反演公式: $\forall x_1, x_2$.

$P_X((x_1, x_2)) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\{x_1\}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\{x_2\})$

$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f_X(t)\, dt$ □.

· 特征函数与矩: $\varphi(t)$ 不一定可微.

$\mathbb{E}|X|^k < \infty$. 则 $\underbrace{f(t)}_{=\mathbb{E}e^{itX}} = \sum_{j=0}^{k} \frac{i^j}{j!} t^j \mathbb{E}X^j + o(|t|^k)$

pf:

$\left|e^{ix} - \sum_{m=0}^{n} \frac{(ix)^m}{m!}\right| \le \min\left\{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!}\right\}$

$\left|f(t) - \sum_{j=0}^{k} \cdots\right| \le \mathbb{E}\left|e^{itX} - \sum_{m=0}^{k} \frac{(itX)^m}{m!}\right|$.

$\le \mathbb{E} \min\left\{\frac{|tX|^{k+1}}{(k+1)!}, \frac{2|tX|^k}{k!}\right\}$

$= \frac{|t|^k}{(k+1)!} \mathbb{E}|X|^k \min\{|tX|, 2(k+1)\}$

$= o(|t|^k)$ as $t\to 0$

$f(t) = 1 + \mathbb{E}[itX] - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[X^2] + o(t^2)$

· 若 $\mathbb{E}|X|^k < \infty$, 则 $f(t)$ k 阶可导 $f^{(k)}(t) = \int (ix)^k e^{itx} dF(x)$

但. $f(t)$ $2k$ 阶可导 $\Rightarrow \mathbb{E}|X|^{2k} < \infty$

$2k+1$ 阶可导 $\Rightarrow \mathbb{E}|X|^{2k} < \infty$

Thm (中心极限定理 iid)

$X_1, \dots, X_n$ iid $\sim X$. $\mathbb{E}X = 0$ $\mathbb{E}X^2 = 1$. 则 $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

证明: ch.f. $f_X(t) = 1 + \mathbb{E}[itX] + \frac{(it)^2}{2}\mathbb{E}X^2 + o(t^2)$

$= 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$.

$\mathbb{E}e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \left(\mathbb{E}\exp\{it\frac{X}{\sqrt{n}}\}\right)^n$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(t^2)\right)^n \xrightarrow{?} e^{-\frac{t^2}{2}} \sim N(0,1)$.

因 $c_n \to c \in \mathbb{C} \Rightarrow (1 + \frac{c_n}{n})^n \to e^c$ □

~~check~~:

特征函数:

Thm (连续性定理). $X_n \sim f_n$. $1 \le n \le \infty$

(1) 若 $X_n \xrightarrow{d} X_\infty$ 则 $f_n(t) \to f_\infty(t)$

(2) 若 $\exists f$ s.t. $f_n(t) \to f(t)$. $\forall t\in\mathbb{R}$. 且 f 在 0 连续. 则

$\exists$ r.v. X. $X_n \xrightarrow{d} X$. 且 X 的 ch.f 为 f.

证明: (1) ✓.

(2). 由 Helly 定理. $\forall \{n'\} \subset \{n\}$. $\exists \{n''\} \subset \{n'\}$

s.t. $X_{n''} \xrightarrow{v} F$.

① 先证 X_n 一致胎紧. 从而 F 是 d.f.

$\mathbb{P}(|X_n| \ge \frac{2}{\eta}) \le \frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} (1 - f_X(t))\, dt$

$\therefore \sup_n \mathbb{P}(|X_n| > r) \le \frac{r}{2}\limsup_{n\to\infty} \int_{-\frac{2}{r}}^{\frac{2}{r}} (1 - f_n(t))\, dt$.

$\overset{DCT}{=} \frac{r}{2}\int_{-2/r}^{2/r} (1 - f(t))\, dt$.

$f(0) = 1$. f 在 0 附近连续. $\therefore$ 上式 $\to 0$

X_n 一致胎紧

② 再证 F 与子列无关

$X_{n''} \xrightarrow{d} F$ 由 ① $f_{n''} \to f_\infty$

$\Rightarrow F \sim f_\infty$ 与 n'' 无关.

$\Rightarrow X_n$ 任一子列均有弱收敛子列 且 极限唯一.

$X_n \xrightarrow{d} X$.

□

- $f(t)$ 在 $2k+1$ 可微 和 $E|X|^{2k+1}<\infty$

反例: $P(X=\pm j)=\frac{c}{2j^2\log j}$

$E|X|=\infty$ 但 $f(t)$ 有导数, 且 $f'(t)$ ∃. □

f $2k+1$ 阶可微 $\Rightarrow E|X|^{2k}<\infty$.

pf: $k=2$. $f''(0)$ 存在且有限, 二阶导数∃

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2f(0)+f(-h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ith}-2+e^{-ith}}{h}\,dF(t)$$

$$=\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{2\cos th-2}{h^2}\,dF(t)$$

由 Fatou 引理. $-f''(0)=\lim_{h\to 0}2\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\cos th}{h^2}\,dF(t)$

$$\ge \int_{\mathbb{R}} t^2\,dF(t)=EX^2.$$

- $n=2k$. 归纳 设对 $n=2k-2$ 对

则 $n=2k$. $EX^{2k-2}<\infty$

$G(x)=\frac{1}{EX^{2k-2}}\int_{-\infty}^{x}y^{2k-2}\,dF(y)$ 为 d.f.

ch.f. $\psi(t)=\int e^{itx}\,dG(x)=\frac{\int e^{itx}x^{2k-2}\,dF(x)}{EX^{2k-2}}$

$$=\frac{1}{EX^{2k-2}}(-1)^{2k-1}f^{(2k-2)}(t)$$

∴ $\psi''(0)$ ∃ $<\infty$ 由 $k=2$ 的结论 $G(x)$ 二阶矩∃

$\Rightarrow \int x^2\,dG(x)=C\int x^{2k}\,dF(x)<\infty \Rightarrow EX^{2k}<\infty$. □

- 一定条件下, 若 $f(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(it)^m}{m!}EX^m$ 成立, 则说明矩方法可以决定特征函数.

Thm: $\limsup_{n\to\infty}\frac{(E|X|^n)^{\frac{1}{n}}}{n}=r<\infty$

则 $|t|<\frac{1}{er}$ 时, $\forall\theta\in\mathbb{R}$, 有 $f(t+\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(\theta)$

证明: $\left|f(t+\theta)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(\theta)\right|$

$=\left|Ee^{i(t+\theta)X}-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{t^n}{n!}Ee^{i\theta X}(iX)^n\right|$

$\le E\left|e^{i\theta X}\left(e^{itX}-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(itX)^n}{n!}\right)\right|\le E\frac{|tX|^k}{k!}=|t|^k\frac{E|X|^k}{k!}\to 0$

n 充分大时 $(E|X|^n)^{\frac{1}{n}}\le n(r+\varepsilon)$. ∴ $\le |t|^k\frac{(k(r+\varepsilon))^k}{k!}\le (e|t|(r+\varepsilon))^n$

$t<\frac{1}{er}$ 时. $\varepsilon\to 0$ 即可 □.

Thm: 若 $\limsup_{n\to\infty}\frac{(E(X^{2n}))^{\frac{1}{2n}}}{2n}=r<\infty$, 则至多存在一个 d.f. F. $\mu_n=\int x^n\,dF(x)$.

证明: $(E|X|^{2k+1})^2\le E|X|^{2k}\,E|X|^{2k+2}$

$\limsup_{n\to\infty}\frac{(EX^n)^{\frac{1}{n}}}{n}=r<\infty$

$|t|<\frac{1}{er}$ 时. $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}EX^n$.

$E|X|^n=E|Y|^n$. 则 $f_X(t)=f_Y(t)$

$|t|<\frac{1}{er}=\text{const}$ 时成立

对 $t\in\mathbb{R}$. 一次次展开 … □

- 何种分布由矩决定?

正态分布. $EX^{2k}=(2k-1)!!$

$\therefore \limsup_{n\to\infty}\frac{(EX^{2n})^{\frac{1}{2n}}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{2n}}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{2n}}=0.$

∴ $X\sim N(0,1)\Rightarrow$ 若 $EX^n=EY^n$, $Y\sim N(0,1)$.

- 由矩方法. $EX_n^k\to EX^k$. $\forall k \Rightarrow X_n\xrightarrow{d}N(0,1)$

- 设 X_n iid. $EX=0$. $EX^2=1$. X 任何阶矩存在 则 $\frac{S_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

~~证明~~:

□

由大数定律与中心极限定理知.

X_n iid. $EX_n=0$. $\mathrm{Var}\,X_n=1$.

$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{a.s.}0$. $\frac{S_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

问一般的 $\frac{S_n-a_n}{b_n}\xrightarrow{d}$ 的极限依分布收敛于什么?

Thm (Type and Law)

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 为常值序列

$a_n>0$, $\{F_n\}$ 弱收敛于非退化分布 $F(x)$.

(1) 设 $F(a_n x+b_n)\xrightarrow{d} G(x)$, G 非退化, 则 $G(x)=F(ax+b)$ 且 $a_n\to a$, $b_n\to b$

(2) $a_n\to a$, $b_n\to b$, 则 $F_n(a_n x+b_n)\xrightarrow{d} F(ax+b)$. □

Thm (Lindeberg-Feller CLT)

对三角阵列 $\{X_{nj}\}_{1\le j\le k_n,\ n\ge 1}$ 而言:

(1) $\forall n$: $X_{n1}\dots X_{nk_n}$ 独立.

(2) $\mathbb{E}X_{nk}=0$ $\forall n,k\in\mathbb{Z}_+$.

(3) $\sum_{j=1}^{k_n}\mathbb{E}X_{nj}^2=1$.

(4)*: $\forall\varepsilon>0$ $\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}[X_{nk}^2 1_{\{|X_{nk}|\ge\varepsilon\}}]\to 0$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

Thm (Lindeberg-Feller). 以下命题等价:

(1) $\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}\xrightarrow{d}N(0,1)$, 且 $\max_{1\le k\le k_n}\mathbb{E}X_{n,k}^2\to 0$

(2) $\forall\varepsilon>0$ $\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}X_{nk}^2 1_{\{|X_{nk}|\ge\varepsilon\}}\to 0$. □

Corollary (Lyapunov). $\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}|X_{nk}|^{2+\delta}\to 0\Rightarrow\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}\xrightarrow{d}N(0,1)$

Thm (无穷小 CLT).

$\forall\varepsilon>0$ $\lim_{k\to\infty}\max_k\mathbb{P}(|X_{nk}|>\varepsilon)=0$. (由Feller条件蕴含)

称作无穷小条件. 则 $\sum_{k=1}^{k_n}X_{n,k}\xrightarrow{d}N(b,c)$. ($b\in\mathbb{R}$, $c>0$ const).

的充要条件为 ① $\forall\varepsilon>0$. $\sum_k\mathbb{P}(|X_{n,k}|>\varepsilon)\to 0$

② $\sum_k\mathbb{E}[X_{nk}1_{\{|X_{nk}|\le 1\}}]\to b$

③ $\sum_k\mathrm{Var}[X_{nk}1_{\{|X_{nk}|\le 1\}}]\to c$.

Thm ~~(Karamata)~~ ~~(Feller)~~

设 $X, X_1, X_2\dots$ i.i.d. 则以下等价

(1) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-m_k)}{a_n}\xrightarrow{d}N(0,1)$. ~~$a_n^2$~~ ~~$m_k=\mathbb{E}[X1_{\{|X|<}$~~

(2) $L(x)=\mathbb{E}X^2 1_{\{|X|\le x\}}$ 在 $+\infty$ 处缓变 (L 为 $[0,\infty)$ 上的函数 且 $\frac{L(cx)}{L(x)}\to 1$ $\forall c>0$ as $x\to\infty$)

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2\mathbb{P}(|X|>x)}{\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\le x\}}]}=0$.

Karamata 引理:

X 非退化, $L(x)$ 缓变 则 $\forall m\in\mathbb{R}$, $L_m(x)=\mathbb{E}[(X+m)^2 1_{\{|X-m|\dots\}}]$ 也缓变. 且 $\forall p\in[0,2)$ $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^{2-p}\mathbb{E}[|X|^p 1_{\{|X|>x\}}]}{L(x)}=0$. □

下面给出 Lindeberg-Feller CLT 的证明.

证法一 特征函数法:

即证: $\mathbb{E}e^{it\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}}\xrightarrow{d}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

希望写成乘积减去乘积, 再用特征函数分析.

设 $\sigma_{nk}^2=\mathbb{E}X_{n,k}^2$.

$X_{n,k}$ ch.f $f_{n,k}$.

设 $G_1\dots G_{nk_n}$ 为独立 r.v. 且

$G_{nk}\sim N(0,\sigma_{nk}^2)$.

$\Rightarrow G_{nk}$ ch. f. $e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}$.

$$\left|\mathbb{E}e^{it\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}}-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|$$

$$=\left|\prod_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}e^{itX_{n,k}}-\prod_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}e^{itG_{nk}}\right|$$

$$\le\sum_{k=1}^{k_n}\left|\mathbb{E}e^{itX_{n,k}}-\mathbb{E}e^{itG_{nk}}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{k_n}\left|\left(\mathbb{E}e^{itX_{n,k}}-1+\frac{t^2}{2}\sigma_{nk}^2\right)-\left(\mathbb{E}e^{itG_{nk}}-1+\frac{t^2}{2}\sigma_{nk}^2\right)\right|$$

$$\le\sum_{k=1}^{k_n}\left|\mathbb{E}e^{itX_{n,k}}-1+\frac{t^2}{2}\sigma_{n,k}^2\right|+\sum_{k=1}^{k_n}\left|\mathbb{E}e^{itG_{n,k}}-1+\frac{t^2}{2}\sigma_{nk}^2\right|$$

$$\lesssim\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}|X_{nk}^2|\wedge|X_{nk}^3|+\mathbb{E}\sum|G_{nk}^2|\wedge|G_{nk}|^3$$

← 拆成 $1_{\{|X_{n,k}|\le\varepsilon\}}$ $1_{\{|X_{n,k}|>\varepsilon\}}$

$$\le\varepsilon+\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}[X_{nk}^2 1_{\{|X_{nk}|>\varepsilon\}}]+\sum\mathbb{E}|G_{nk}|^3.$$

而 $\max_k\sigma_{nk}^2=\max\mathbb{E}X_{nk}^2$

$$\le\max(\mathbb{E}X_{nk}^2 1_{\{|X_{nk}|<\varepsilon\}}+\mathbb{E}X_{nk}^2 1_{\{|X_{nk}|\ge\varepsilon\}})$$

$$\le\varepsilon^2+\sum\mathbb{E}X_{nk}^2 1_{\{|X_{nk}|\ge\varepsilon\}}\to\varepsilon^2\to 0$$ □

~~§2.2 正态逼近的Stein方法~~

证法二：Lindeberg 替换法：

设 $X_{n,k}$, $G_{n,k}$ 独立.

$Z_{n,k} = G_{n,1}+\cdots+G_{n,k}+X_{n,k+1}+\cdots+X_{n,k_n}$. $1\le k\le k_n$.

设 f 为具有2、3阶有界导数的函数.

设 $G\sim N(0,1)$

$Ef(X_{n,1}+\cdots+X_{n,k_n}) - Ef(G)$

$=\sum_{k=1}^{k_n}\left(E(f(Z_{n,k}+X_{n,k})) - Ef(Z_{n,k}+G_{n,k})\right)$

∵ 由 $|f(x+y) - (f(x)+f'(x)y+\frac{1}{2}f''(x)y^2)|$

$\le M(y^2\wedge|y|^3)$. $\quad M = \frac{1}{6}\sup|f^{(3)}(x)| \vee \sup|f''(x)|$

∴ $|E[f(Z_{n,k}+X_{n,k}) - Ef(Z_{n,k}) - \frac{\sigma_{nk}^2}{2}f''(Z_{nk})]|$

$\le ME[X_{nk}^2\wedge|X_{nk}|^3]$

$|E[f(Z_{nk}+G_{nk}) - f(Z_{nk}) - \frac{\sigma_{nk}^2}{2}f''(Z_{nk})]|$

$\le ME[G_{nk}^2\wedge|G_{nk}|^3]$

∴ $E[f(X_{n1}+\cdots+X_{nk})]\to Ef(G)$.

由 Portmanteau Thm. 知 CLT 对 □.

§2.3: Stein 方法与正态逼近

$Nf := E[f(X)]$ $\quad X\sim N(0,1)$

Thm (Stein Criteria) $X\sim N(0,1)$.

$\iff \forall f\in C_c^\infty$ $\quad Ef'(X) = E[Xf(X)]$

证明: ⇒: $X\sim N(0,1)$, $N|f'|<\infty$

则 $Ef'(X) = \int f'(x)\varphi(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^0 f'(x)dx\int_{-\infty}^x \varphi'(z)dz - \int_0^\infty f'(x)dx\int_x^\infty\varphi'(z)dz$.

$= \int_{-\infty}^0 \varphi'(z)dz\int_z^0 f'(x)dx - \int_0^\infty\varphi'(z)dz\int_0^z f'(x)dx$

$= \int_{-\infty}^0\varphi'(z)(f(0)-f(z))dz - \int_0^\infty\varphi'(z)(f(z)-f(0))dz$

$= -\int\varphi'(z)(f(0)-f(z))dz = \int z\varphi(z)f(z) = E(Xf(X))$. □

Thm. (Berry-Esseen).

$X, X_1,\dots,X_n$ iid $EX=0$. $EX^2=\sigma^2>0$. $E|X|^3<\infty$

则 $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right) - \Phi(x)\right| \lesssim \frac{E|X|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$

§2.4 Poisson 收敛

$X, X_1,\dots,X_n$ iid $\sim B(1,p)$.

$S_n\sim B(n,p)$, $ES_n = np$.

By CLT. $\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\xrightarrow{d} N(0,1)$

设 $X_{n1},\dots,X_{nn}$ iid. $X_{ni}\sim N(1,p_n)$

$p=p_n$ 满足. $np_n\to\lambda\in[0,\infty)$.

$S_n=\sum_{i=1}^n Y_{ni}\xrightarrow{d}P(\lambda)$.

$P(S_n=k) = \binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}$.

$\sim \frac{n^k}{k!}p_n^k(1-p_n)^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}$

Thm: $X_{n,k}$ 独立阵列

$P(X_{nk}=1)=p_{nk} = 1-P(X_{nk}=0)$.

若有 (1) $\sum_{k=1}^{k_n}p_{nk}\to\lambda\in(0,\infty)$.

(2) $\max_{1\le k\le k_n}p_{nk}\to0$.

则 $S_n = X_{n1}+\cdots+X_{nk_n}\xrightarrow{d}P(\lambda)$.

证: $f_{nk}(t) = (1-p_{nk})+e^{it}p_{nk}$

$\Rightarrow Ee^{itS_n} = \prod_{k=1}^n(1+p_{nk}(e^{it}-1))$

而 $P(\lambda)$ 的 ch.f. 为 $e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

考虑: $\left|\prod_{k=1}^{k_n}(1+p_{nk}(e^{it}-1)) - \prod_{k=1}^{k_n}e^{p_{nk}(e^{it}-1)}\right|$

$\le\sum_{k=1}^{k_n}\left|\exp(p_{nk}(e^{it}-1)) - (1+p_{nk}(e^{it}-1))\right|$ $\quad |e^b-1-b|\le|b|^2$.

$\le\sum_{k=1}^{k_n}p_{nk}^2|e^{it}-1|^2$.

$\le 4\sum p_{nk}^2\le 4\sup_k p_{nk}\sum_{k=1}^{k_n}p_{nk}\to0$.

(A)全变差距离

$\|\mu-\nu\|_{TV} = \sup_{A} |\mu(A)-\nu(A)|$

$\therefore \|P_n - P\| \to 0 \Rightarrow P_n \xrightarrow{d} P$.

对离散分布, $\|\mu-\nu\| = \frac{1}{2}\sum_i |\mu_i - \nu_i|$

Lem: $\|\mu_1 * \mu_2 - \nu_1 * \nu_2\| \le \|\mu_1-\nu_1\| + \|\mu_2 - \nu_2\|$

$LHS = \frac{1}{2}\sum_x |\mu_1 * \mu_2(x) - \nu_1 * \nu_2(x)|$

$\le \frac{1}{2}\sum_x \sum_y |\mu_1(x-y)\mu_2(y) - \nu_1(x-y)\nu_2(y)|$

$\le \|\mu_1-\nu_1\| + \|\mu_2-\nu_2\|$ (略去)

Lem: 设 $\mu(1)=p=1-\mu(0)$

$\nu \sim Poi(p)$ 则 $\|\mu-\nu\| \le p^2$

Pf: $2\|\mu-\nu\| = \sum_i |\mu_i - \nu_i|$

$= |\mu_0-\nu_0| + |\mu_1-\nu_1| + \sum_{i\ge 2}|\mu_i-\nu_i|$

$= |1-p-e^{-p}| + |p-pe^{-p}| + 1-e^{-p}(1+p)$

$= 2p(1-e^{-p}) \le 2p^2$. □

下面证明 Poisson 收敛

$S_n = X_{n1}+\dots+X_{nn} \xrightarrow{d} P(\lambda)$.

Pf: $X_{nk}\sim\mu_{nk}$. $S_n\sim\mu_n$.

ν_{nk}. ν_n 分别为参数 p_{nk}. $\lambda_n = \sum p_{nk}$ 的 Poisson.

$\mu_n = \mu_{n1} * \cdots * \mu_{nk_n}$

$\nu_n = \nu_{n1} * \cdots * \nu_{nk_n}$

$\|\mu_n - \nu_n\| \le \sum_{k=1}^{k_n} \|\mu_{nk} - \nu_{nk}\| \le \sum_{k=1}^{k_n} p_{nk}^2 \to 0$.

$\nu_n \xrightarrow{d} \nu \Rightarrow \mu_n \xrightarrow{d} \nu$

Poisson 收敛定理.

设 取非负整数值的 r.v. 阵列 X_{nk}, $1\le k\le n_k$.

满足无穷小条件 则 $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \xrightarrow{d} P(\lambda) \Longleftrightarrow$

① $\sum_k P(X_{nk}>1) \to 0$

② $\sum_k P(X_{nk}=1) \to \lambda$ (令 $X_{nk}' = X_{nk} 1_{\{X_{nk}=1\}}$ 用 BC 引理)

§2.5 Stable Laws

Recall: X_n iid. $E[X^2 1_{\{|X|\le x\}}]$

缓变 $\Rightarrow \frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

若不存在 则是否收敛于其它分布

Def: 称 F or ch.f. 稳定, 若 $\forall k\in\mathbb{Z}_+$, $\exists c_k>0$ 以及 γ_k s.t. $(f(t))^k = e^{i\gamma_k t} f(c_k t)$

iid X_n 稳定, 则 $S_k \overset{d}{=} c_k X + \gamma_k$.

---

eg: X_n iid $\sim$ Cauchy(a). $p(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$

则 $\frac{S_n}{n} \overset{d}{=} X$. 从而 极限分布为柯西分布

Pf: ch.f: $\int \frac{a}{\pi(x^2+a^2)} e^{itx}\,dx = e^{-a|t|}$.

$f_{\frac{S_n}{n}}(t) = E e^{it\frac{S_n}{n}}$

$= \prod_{i=1}^{n} e^{it\frac{X_i}{n}}$

$= e^{-a|t|}$ □.

eg (幂律分布)

$P(|X|>x) = x^{-\alpha}$. $x\ge 1$. 且 X 对称

$0<\alpha<2$. $x^{-\alpha}L(x)$ 也可以

则 $\exists$ r.v Y. $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d} Y$.

ch.f. $1-f_X(t) = \int_{|x|\ge 1} (1-e^{itx}) \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}}\,dx$

$= \alpha \int_{|x|\ge 1} \frac{1-\cos tx}{x^{\alpha+1}}\,dx$

$\overset{u=tx}{=} \alpha t^\alpha \int_{t}^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}\,du$.

$E e^{it\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}} \to e^{-ct^\alpha}$. □

Thm. ∃ iid r.v. $X_1 \dots X_n \dots$ 以及 a_n, b_n. 使

$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} F$ 的充要条件为 F 是稳定分布

说明 iid r.v. 作正则化、中心化后，其弱极限只能是稳定分布.

证：$\Leftarrow$ 若 F 稳定

则 ch.f. $(f(t))^n = e^{i\nu_n t} f(c_n t)$ $(\exists c_n > 0, \nu_n)$

$$\frac{S_n - \nu_n}{c_n} \stackrel{d}{=} F.$$

ch.f 为 $f(\frac{t}{c_n})^n e^{-it\frac{\nu_n}{c_n}} = f(t)$

$\Rightarrow$: $Z_n = \frac{S_n - b_n}{a_n}$.

$Z_{kn} a_{kn} = S_{kn} - b_{kn}$

$= (S_n + (S_{2n} - S_n) + \dots + (S_{kn} - S_{(k-1)n})) - b_{kn}$

$S_n^i = S_{in} - S_{(i-1)n}$. $S_0 = 0$ $S_n^1, S_n^2 \dots S_n^k$ 独立.

$\therefore Z_{kn} a_{kn} = (S_n^1 - b_n) + \dots + (S_n^k - b_n) - b_{kn} + k b_n$

$\therefore \frac{a_{kn} Z_{kn} + b_{kn} - k b_n}{a_n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{S_n^i - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} F * \dots * F.$

而 $Z_{kn} \xrightarrow{d} F$

若 F 非退化. 由律与型 (Type and Law) 定理.

$\exists \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ s.t. $(F * \dots * F)(x) = F(\tilde{a}_k x + \tilde{b}_k)$.

$\therefore$ F stable. □.

Rmk:

(1). Stable Law 的 ch.f 为

$f(t) = \exp\{itc - b|t|^\alpha (1 + ik\,\mathrm{sgn}(t)\, w_\alpha(t))\}$

其中 $-1 \le k \le 1$. $\alpha \in [0, 2]$.

$w_\alpha(t) = \begin{cases} tg(\frac{\pi\alpha}{2}) & \alpha \ne 1 \\ \frac{2}{\pi} \lg|t|. & \alpha = 1 \end{cases}$

$\alpha = 2$: 正态分布

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\{-\frac{1}{2x}\}$. $x > 0$ stable law (B.M. 首中时)

Def (吸引域). $X, X_1 \dots X_n$ iid 若 ∃ $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} F$

则称 X 属于 F 的吸引域

Thm X 属于某个具有指数 $\alpha \in (0, 2)$ 的稳定分布的吸引域. 充要条件

(1) $\mathbb{P}(|X| > x) = x^{-\alpha} L(x)$. $L(x)$ 慢变.

(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(X > x)}{\mathbb{P}(|X| > x)} = \theta \in [0, 1]$

若 (1) (2) 对. 则 $a_n = \inf\{x : \mathbb{P}(|X| > x) \le \frac{1}{n}\}$

$b_n = n \mathbb{E} X 1_{\{|X| \le a_n\}}$

则 $\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} F$.

由 F 的 ch.f 中. $k = 2\theta - 1$ □.

§2.5. 无穷可分分布

Def: $f(t)$ 为无穷可分函数 若.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists f_n(t)$ s.t. $f(t) = (f_n(t))^n$

$\Updownarrow$

设 F 为 i.d. $\exists Y_{n1} \dots Y_{nn}$ iid s.t. $Y_{n1} + \dots + Y_{nn} \stackrel{d}{=} F$

• 任一无穷可分分布对应一个 Lévy 过程.

Thm 设 r.v. 阵列 $\{X_{nk}; 1 \le k \le n\}$ 使

(1). $\forall n$. X_{nk} i.d.

(2) $X_{n1} + \dots + X_{nk} \xrightarrow{d} F$

$\Leftrightarrow$. F i.d.

(Rmk: 稳定分布一定无穷可分.)

Pf: $\Leftarrow$. 显然.

$\Rightarrow$: 先考虑 n = 2.

$S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} X_{2n,i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_{2n,i}}_{Y_n} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{2n} X_{2n,i}}_{Y_n'}$.

$\vee$ Y_n, Y_n' iid.

$\{Y_n\}$ 一致胎紧?

$P(Y_n > x)^2 = P(Y_n > x, Y_n' > x)$

$\le \mathbb{P}(S_{2n} > 2x)$

$P(Y_n < -x)^2 \le P(S_{2n} < -2x)$ $\Rightarrow$ 一致胎紧.

由Helly定理. $\exists n_k$.

$$\left.\begin{array}{l} Y_{n_k} \xrightarrow{d} Y \\ Y'_{n_k} \xrightarrow{d} Y' \\ Y \overset{d}{=} Y'.\ Y, Y' \text{独立} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{2n_k} = Y_{n_k} + Y'_{n_k} \xrightarrow{d} Y + Y'.$$

$\therefore F \overset{d}{=} Y + Y'$.

$\therefore f_F(t) = (f_Y(t))^2$.

类似. $f_F(t) = (f_Z(t))^k$ $\exists Z$. $\therefore$ 无穷可分 □.

Thm: 设独立阵列 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件 则 X_{nk} 之和极限分布族与无穷可分分布族一致

$f(t)$ 为 i.d. 则 $\forall t \in \mathbb{R}$. $f(t) \neq 0$

Thm (Lévy-Khinchin Thm). $f(t)$ i.d. $\Longleftrightarrow$

ch.f. $f(t) = \exp\{ict - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int (e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}) \nu(dx)\} < \infty$

ν 为 Lévy 测度. $\nu(0) = 0$. $\int (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$

□.

3.3 离散鞅论

3.3.1 停时

Def: 称 $T:\Omega\to \mathbb{T}\cup\{\infty\}$ 称为停时 若 $\forall t\in\mathbb{T}$ $\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t$

宽停时 若 $\forall t\in\mathbb{T}$ $\{T<t\}\in\mathcal{F}_t$

Rmk: (1) 停时是宽停时

(2) T 为 $\{\mathcal{F}_t\}$ 宽停时 则 T 为 $\{\mathcal{F}_{t+}\}$ 停时

$\mathcal{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$

$s<t$ $\mathcal{F}_{s+}\subset\mathcal{F}_{t+}$

要证 $\{T\le t\}\overset{?}{\in}\mathcal{F}_{t+}$.

$\overset{\shortparallel}{\bigcap_{n=1}^{\infty}}\{T<t+\frac{1}{n}\}\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_{t+\frac1n}=\mathcal{F}_{t+}$.

宽停时 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ 时. T 为宽停时 $\Longleftrightarrow$ $T+1$ 为 $\{\mathcal{F}_n\}$ 停时.

eg: $X=\{X_t, t\in\mathbb{T}_+\}$ $X_t\in\mathcal{F}_t$.

$D_A=\inf\{t\ge 0: X_t\in A\}$ $A\subset\mathbb{R}$ 可测

$\tau_A=\inf\{t>0: X_t\in A\}$ $A\subset\mathbb{R}$ 可测

$\inf\emptyset=\infty$

$\mathbb{T}=\mathbb{Z}\Rightarrow D_A,\ \tau_A$ 是停时

pf: $\{D_A\le n\}=\bigcup_{k=0}^{n}\{X_k\in A\}\in\mathcal{F}_n$

$\{\tau_A\le n\}=\bigcup_{k=1}^{n}\{X_k\in A\}\in\mathcal{F}_n$

$\mathbb{T}=\mathbb{R}$. $\{X_t\}$ 右连续 $X_t\xrightarrow{a.s.}X_s$ $t\downarrow s$

A 开. X 右连续 $\Rightarrow D_A=\tau_A$

$\{D_A<t\}=\bigcup_{\substack{s<t\\ s\in\mathbb{Q}}}\{X_s\in A\}\in\mathcal{F}_t$

D_A. τ_A 为宽停时. 是 $\{\mathcal{F}_{t+}\}$ 停时.

A 闭 X 连续 $\Rightarrow D_A$ 为停时.

$\{D_A\le t\}=\{\inf_{\substack{s\in\mathbb{Q}\\ s\le t}} d(X_s,A)=0\}\in\mathcal{F}_t$.

Prop (1) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ 则 T 为停时 $\Longleftrightarrow$ $\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$

(2) S,T 为停时 则 $S\vee T$, $S\wedge T$, $S+T$ 为停时

(3) $\{T_n\}$ 为 $\mathcal{F}_n$ 停时 则 $\vee T_n$ 为 $\mathcal{F}_n$ 停时

(4) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$. T_n 为 $\{\mathcal{F}_t\}$ 停时 $T_n\downarrow$ $\Rightarrow$ $\wedge T_n$ 为 $\mathcal{F}_{t+}$ 停时

Check (2)

$\{T+S>t\}=\{T=0, S>t\}\cup\{S=0, T>t\}\cup\{T\ge t, S>0\}\cup\{0<T<t, T+S>t\}$

$\{0<T<t, T+S>t\}=\bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ 0<r<t}}\{r<T<t, T+S>t\}$

$\mathcal{F}_T=\{A\in\mathcal{F}_\infty: A\cap\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t,\ \forall t\ge 0\}$.

则 (1) $T\in\mathcal{F}_T$

(2) $S\le T\Rightarrow\mathcal{F}_S\subseteq\mathcal{F}_T$

(3) $\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_{S\wedge T}$

(4) $\mathcal{F}_S\vee\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_{S\vee T}=\{A\cup B;\ A\in\mathcal{F}_S, B\in\mathcal{F}_T, A\cap B=\emptyset\}$

(5) $\{S\le T\}$, $\{S<T\}$, $\{S=T\}\in\mathcal{F}_{S\wedge T}$

例: $\mathcal{F}_{S\vee T}\cap\{S\le T\}=\mathcal{F}_T\cap\{S\le T\}$

$\mathcal{F}_{S\wedge T}\cap\{S\le T\}=\mathcal{F}_S\cap\{S\le T\}$

$\mathcal{F}_{S\vee T}\cap\{S<T\}=\mathcal{F}_T\cap\{S<T\}$

$\mathcal{F}_{S\wedge T}\cap\{S<T\}=\mathcal{F}_T\cap\{S<T\}$

$\mathcal{F}_{S\vee T}\cap\{S=T\}=\mathcal{F}_S\cap\{S=T\}$

(4). 只需证

$\mathcal{F}_{S\vee T}\subseteq\{A\cup B: A\in\mathcal{F}_S,\ B\in\mathcal{F}_T, A\cap B=\emptyset\}$

设 $C\in\mathcal{F}_{S\vee T}$

$C=(C\cap\{S\le T\})\cup(C\cap\{S>T\})$

$C\cap\{S\le T\}\in\mathcal{F}_{S\vee T}\cap\{S\le T\}=\mathcal{F}_T\cap\{S\le T\}\subset\mathcal{F}_T$, $C\cap\{S>T\}\in\mathcal{F}_S$ □

§4.2 *条件期望与停时:

$X \in L^1$ $X_n := \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$

对 $\forall$ 停时 T: $X_T = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_T]$

Pf:

Step 1: $X_T \in \mathcal{F}_T \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, A 可测

$\{X_T \in A\} \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$

$\| $

$\bigcup_{m=1}^{n} (\{X_T \in A\} \cap \{T = m\}) \in \bigcup_{m=1}^{n} \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$

Step 2: $\forall A \in \mathcal{F}_T$ $\int_A X_T = \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_T)$

$\forall n$ $\int_{A \cap \{T=n\}} X_T = \int_{A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n} X_n = \int_{A \cap \{T=n\}} X$

对 n 求和

$\int_A X_T = \int_A X$. $\forall A \in \mathcal{F}_T$

□.

Lem: 设 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ 为 2 个 σ-代数, ξ, η 可积. $A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$.

若 $\mathcal{G} \cap A = \mathcal{H} \cap A$. 且在 A 上, $\xi = \eta$ a.s.

则在 A 上 $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[\eta|\mathcal{H}]$ a.s.

证: 令 $B = A \cap \{\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] > \mathbb{E}[\eta|\mathcal{H}]\}$

只需证 $\mathbb{P}(B) = 0$

· $B \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$.

$B = \{1_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] > 1_A[\eta|\mathcal{H}]\}$

· $1_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] \in \mathcal{G}$ ✓

$1_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] \in \mathcal{H}$?

$\Leftarrow \forall x \in \mathbb{R}$. $\{1_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] \le x\} \in \mathcal{H}$.

$\Leftarrow \begin{cases} x \le 0 & \text{LHS} = A \cap \{\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] \le x\} \in A \cap \mathcal{G} = \mathcal{H} \cap A \subseteq \mathcal{H} \\ x > 0 & \text{左} = A^c \cup \{A \cap \{\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] \le x\}\} \in \mathcal{H} \end{cases}$

due, $1_A \mathbb{E}[\eta|\mathcal{H}] \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$. $\Rightarrow B \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$

□

考虑 $\mathbb{E}[1_B(\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[\eta|\mathcal{H}])]$

$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]1_B] = \mathbb{E}[\xi 1_B] = \mathbb{E}[\eta 1_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\eta|\mathcal{H}]1_B]$

$\therefore \mathbb{E}[1_B(\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[\eta|\mathcal{H}])] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 0$

$\therefore \mathbb{E}[X 1_{\{X>0\} \cap B}] = 0$

$\ge \mathbb{E}[X 1_{B \cap \{X > \varepsilon\}}] \ge \varepsilon \mathbb{P}(B \cap \{X > \varepsilon\})$

在 A 上,

$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] \le \mathbb{E}[\eta|\mathcal{H}]$ a.s.

$\therefore \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\eta|\mathcal{H}]$ on A a.s.

□.

令 $A = \{T = n\} \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_n$

$\mathcal{F}_T \cap \{T = n\} = \mathcal{F}_n \cap \{T = n\}$

在 A 上 $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ a.s.

$= X_n = X_T$ on A.

□.

对

S, T 停时, $X \in \mathcal{F}_T$ 可积, 则

$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{S \wedge T}]$ a.s.

证: 在 $\{S \le T\}$ 上

$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{S \wedge T}]$ a.s.

$\{S > T\}$ 上 $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{S \wedge T}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_T]$

$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{S \vee T}] = X$ a.s.

取 $X = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_T]$.

$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_{S \wedge T}]$

$= \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{S \wedge T}]$

$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_S]|\mathcal{F}_T]$ □

· X_n 实值 a.s.p. $\mathcal{F}_n$

若 $\forall n \ge 0$ 有 (1) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$

(2) $X_n \in \mathcal{F}_n$

(3) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ a.s.

$\ge$: 下鞅 $\le$: 上鞅

一般考虑自然过滤 $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1 \ldots X_n)$

$(X_n, \mathcal{F}_n)$ 为鞅 $\Rightarrow \{X_n, \mathcal{F}_n^X\}$ 为鞅

(相对于 $\mathcal{F}_n$)

Prop. (1) X_n 为 $\mathcal{F}$-上鞅 $\Leftrightarrow$ $-X_n$ 为 $\mathcal{F}$-下鞅

(2) $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \overset{a.s.}{=} X_n \Leftrightarrow \forall m > n$, $E(X_m|\mathcal{F}_n) = X_n$ a.s.

(3) X_n 为下鞅 $EX_n \uparrow$

下鞅为鞅 $\Leftrightarrow EX_n = \text{const}$.

eg. $X_1, X_2, \dots$ 独立 $EX_i = 0$ $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

则 $E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$

$\overset{独立}{=} S_n + EX_{n+1} = S_n$. $\{S_n\}$ 为 $\mathcal{F}^X$-鞅.

□

eg. $EX_i^2 = \sigma^2 < \infty$ 则 $(S_n^2 - n\sigma^2, \mathcal{F}_n^X)$ 为鞅

证. $E(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = E((S_n + X_{n+1})^2|\mathcal{F}_n)$.

$= S_n^2 + EX_{n+1}^2 + 2E(S_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ ($=0$)

$\Rightarrow E(S_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2|\mathcal{F}_n) = S_n^2 - n\sigma^2 + EX_{n+1}^2 - \sigma^2$

$= S_n^2 - n\sigma^2$.

□

eg. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立 正值 r.v $EX_i = 1$.

$M_n = \prod_{i=1}^n X_i$ $\{M_n, \mathcal{F}_n^X\}$ 为鞅.

乘积鞅 $EX_i = 1$, 正值

$E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[M_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$

$= M_n E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$

$= M_n EX_{n+1} = M_n$

eg. $\prod_{i=1}^n \frac{e^{\lambda X_i}}{Ee^{\lambda X_i}}$ $0 < Ee^{\lambda X_i} < \infty$

$= \frac{e^{\lambda S_n}}{\prod_{i=1}^n e^{\lambda EX_i}}$ Wald 鞅.

- $Y_0, Y_1, \dots$ 为马氏链 具有转移概率矩阵 P

$P_{ij} = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i)$

设 f 满足 $f(i) = \sum P_{ij} f(j)$

则 $(f(Y_n), \mathcal{F}^Y_n)$ 为鞅

$E[f(Y_{n+1})|\mathcal{F}_n^Y] = E[f(Y_{n+1})|Y_0, \dots, Y_n]$

$= E[f(Y_{n+1})|Y_n]$

$= \sum_{j=1} f(j) \cdot P(Y_{n+1} = j | Y_n = i)$

$= \sum_{j=1} P_{ij} f(j) = f(i) = f(Y_n)$

$P\nu = \lambda \nu$ 令 $\nu = (f(i))$

若 P_{ij} $f(j) = \lambda f(i)$ $\forall i$

$(\lambda^{-n} f(Y_n), \mathcal{F}^Y_n)$ 为鞅.

□

例: Polya 坛子模型.

0 时刻有一红一绿 每个时刻抽一个球

记下颜色后放回 再放入一个同色的球.

X_n 为 n 时刻红球所占比例 Y_n 为 n 时刻红球个数

$Y_n = (n+2) X_n$.

则 X_n 为鞅.

Pf: $E[Y_{n+1}|Y_n]$.

$1 \le k \le n+1$ k 红 ... 个绿.

$E[Y_{n+1}|Y_n = k] = \frac{k(n+2-k)}{n+2} + \frac{(k+1)k}{n+2}$

$= k\frac{n+3}{n+2}$.

$\therefore E[Y_{n+1}|Y_n] = Y_n \frac{n+3}{n+2}$

$\therefore X_{n+1} = \frac{Y_{n+1}}{n+3}$

$E[X_{n+1}|Y_n] = X_n \Rightarrow E[X_{n+1}|X_n] = X_n$.

设 $\mathcal{F}_n$ 为历史过程...

则 $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n^Y) = X_n$.

□

eg. r.v. $Y_0, Y_1, \dots$ i.i.d f_0 f_1 两个 p.d.f

$X_n = \frac{f_1(Y_0)\cdots f_1(Y_n)}{f_0(Y_0) f_0(Y_1) \cdots f_0(Y_n)}$

$Y_0 \sim f_0$ 时 $(X_n, \mathcal{F}_n^Y)$ 为鞅

$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^Y] = X_n E\left[\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})} \middle| \mathcal{F}_n^Y\right]$

$= X_n E\left[\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})}\right]$

$= X_n \int \frac{f_1(y)}{f_0(y)} f_0(y)\, dP = X_n$

□

例. Y_n 为 $\mathcal{F}_n$ 适应的 s.p.

令 $X_n = \sum_{i=1}^n (Y_i - E[Y_i|\mathcal{F}_{i-1}])$

$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ ← 鞅

鞅差: $E[X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n]=0$

∴ $E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n Y_i$ 为鞅

$X_n = \sum_{i=1}^n (Y_i - E[Y_i|\mathcal{F}_{i-1}])\, a_i(Y_1,\dots,Y_{i-1})$

若可积, 则为 $\mathcal{F}_n$ 鞅.

例: $\forall Y\in L^1$, 则 $\mathcal{F}_n$, $X_n = E[Y|\mathcal{F}_n]$ 为鞅

$\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_\infty \ni Y$, $X_\infty = Y$

$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$

$X_0 = E[Y|\mathcal{F}_0] = EY$

· 序列 X_n 为一致可积鞅, 上例是一一致可积鞅

可以写作如此形式.

· $\{E[Y|\mathcal{G}] \mid \mathcal{G}\subseteq \mathcal{F}\}$ 一致可积.

$\{X_n\}$ 一致可积

$\sup_n E[X_n 1_{\{|X_n|\ge M\}}] \to 0$ as $M\to\infty$

∴ 要证: $\forall \varepsilon>0\ \exists M, \forall \mathcal{G}$ $E[|E[Y|\mathcal{G}]|\, 1_{\{|E[Y|\mathcal{G}]|>M\}}] < \varepsilon$

$LHS \le E[E[|Y||\mathcal{G}]\, 1_{\{E[|Y||\mathcal{G}]>M\}}]$

$= E[|Y|\, 1_{\{E[|Y||\mathcal{G}]>M\}}]$

$P(E[|Y||\mathcal{G}]>M) \le \frac{E[E[|Y||\mathcal{G}]]}{M} = \frac{E|Y|}{M} \to 0$ as $M\to\infty$

由积分绝对连续性即得 □

Prop (1) X_n 为鞅, φ 凸, $E|\varphi(X_n)|<\infty$ 对

$\varphi(X_n)$ 为下鞅.

(2) 下鞅 + 递增凸 ⇒ 下鞅

· X_n 为平方可积鞅

$EX_n^2 = EX_0^2 + \sum_{k=1}^n E(X_k - X_{k-1})^2$. $S_n = \sum_{k=1}^n Y_i$, $EY_i=0$

$\Rightarrow ES_n^2 = \sum_{i=1}^n Var\, Y_i = \sum_{i=1}^n EY_i^2$

$EY_kY_m \underset{k<m}{=} E(E(Y_kY_m|\mathcal{F}_k)) = E(Y_k E(Y_m|\mathcal{F}_k))$

§3.2 鞅收敛定理

Def (鞅变换) $X \in \mathbb{F}$, $H=(H_n)$ 为可料过程

$(H\cdot X)_n := \sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1})$

若 X 为鞅, 则称之为鞅变换.

· X 为鞅 ⇒ $H\cdot X$ 为鞅

X 为非负上/下鞅 ⇒ $H\cdot X$ 为非负上/下鞅.

· X 为 $\mathbb{F}$ 鞅(下), N 为停时 ⇒ $X^N = \{X_{n\wedge N}\}$ 仍为 $\mathbb{F}$(下)鞅.

Pf: $E[X_{N\wedge(n+1)}|\mathcal{F}_n]$

$= E[X_{N\wedge(n+1)} 1_{\{N\le n\}}|\mathcal{F}_n] + E[X_{N\wedge(n+1)} 1_{\{N>n\}}|\mathcal{F}_n]$

$= X_{n\wedge N} + 1_{\{N>n\}} E[X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n]$

$= X_{n\wedge N}$ □

$H_n = 1_{\{N\ge n\}} \in \mathcal{F}_{n-1}$

$(H\cdot X)_n = X_{n\wedge N}$

Doob分解

对任意 $\mathcal{F}_n$ 适应可积 s.p. 存在唯一的分解 $X_n = M_n + A_n$, $(M_n, \mathcal{F}_n)$ 为鞅, A_n 可料

特别 X_n 下鞅 ⟺ A_n 不减.

证: 唯一性:

$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) + E(A_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n + A_{n+1}$

$\Rightarrow E(X_{n+1}-X_n|\mathcal{F}_n) = A_{n+1}-A_n$

$\Rightarrow A_n = \sum_{k=1}^n (E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}) + A_0$

$= \sum_{k=1}^n E[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]$

$M_n = X_n - A_n = X_n - \sum_{k=1}^n (E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1})$

$= X_n - E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] + X_{n-1} - E[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-2}] \cdots = \sum_{k=1}^n (X_k - E(X_k|\mathcal{F}_{k-1})) + X_0$

给开始: —

□

Prop: 比上鞅中, 若 X_n 一致 L^1 有界 (or 一致可积)
下鞅对 M_n, A_n 为一致 L^1 有界 (or 一致可积)

证: $\sup_n E|X_n|<\infty$

$\mathbb{E}A_n=\mathbb{E}[-M_n+X_n]\le\mathbb{E}|X_n|-\mathbb{E}M_1$

$A_n\ge0 \Rightarrow$ 一致 L^1 有界

$\therefore M_n$ 一致 L^1 有界.

□

eg. $X_n=\sum_{i=1}^{n}1_{B_i}\quad B_i\in\mathcal{F}_i$

$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)-X_n=\sum_{i=1}^{n}1_{B_i}+\mathbb{E}[1_{B_{n+1}}|\mathcal{F}_n]-\sum_{i=1}^{n}1_{B_i}$
$=A_{n+1}-A_n$.

$A_{n+1}-A_n=\mathbb{P}(B_{n+1}|\mathcal{F}_n)$

$A_n=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i|\mathcal{F}_{i-1})$

$M_n=X_n-A_n$

$\{\sum_{i=1}^{\infty}1_{B_i}=\infty\ a.s.\}\overset{a.s.}{=}\{\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_i|\mathcal{F}_{i-1})=\infty\ a.s.\}$

$\{B_i\ i.o.\}$

$\therefore\mathbb{P}(B_i\ i.o)=\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_i|\mathcal{F}_{i-1})=\infty)$

~~Thm (穿越数)~~

Thm Doob 下鞅上穿不等式:

$(b-a)\mathbb{E}U_n\le\mathbb{E}(X_n-a)^+-\mathbb{E}(X_0-a)^+$.

□

Thm: 下鞅收敛定理: X_n 为下鞅.

$\sup_n EX_n^+<\infty$ ~~$\Longleftrightarrow\sup_n E|$~~ $\Rightarrow X_n\xrightarrow[\exists]{a.s}Y\quad E|X|<\infty$

Pf: $\forall a<b$

$(b-a)U_n\le E(X_n-a)^+-E(X_0-a)^+$
$\le\mathbb{E}X_n^++|a|+|a|\le\sup_n EX_n^++|a|=:M$.

MCT. $n\to\infty\quad(b-a)\mathbb{E}U<\infty\Rightarrow U<\infty$ a.s.

$\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty}X_n<a<b<\limsup_{n\to\infty}X_n)=0$

$\Rightarrow\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty}X_n\ne\limsup_{n\to\infty}X_n)=0$

$\Rightarrow$ a.s ✓

$\mathbb{E}|X|=\mathbb{E}\lim_{n\to\infty}|X_n|\le\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n|\le\sup_n\mathbb{E}|X_n|<\infty$

□

eg: 非负上鞅 ∞ a.s. 收敛, $EX_n\le EX_0$

设 X_n 独立. $\mathbb{E}X_n=0\quad\sum\mathbb{E}X_n^2<\infty$
$\Rightarrow\sum X_n$ a.s. 收敛

证: $Y_n=\sum X_i\quad\sup E|Y_n|<\infty$
$\le\sqrt{\mathbb{E}Y_n^2}$
$\le\sqrt{\sum\mathbb{E}X_i^2}$

Rmk:

(1) ~~$\forall$~~ $\sup EX_n^+<\infty\not\Rightarrow X_n\xrightarrow{L^1}X$.

(2) Vitali 收敛定理. $\mathbb{E}|X_n|\to\mathbb{E}|X|$

$X_n\xrightarrow{L^1}X\iff X_n$ U.I.

反例: (1). $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{2}$

$Y_n=\prod_{i=1}^{n}X_i\to0$ a.s.

$\mathbb{P}(Y_n\ne0)=\mathbb{P}(X_i\ne0\quad1\le i\le n)$
$=(\frac{1}{2})^n\to0$

$\mathbb{E}Y_n=1.\Rightarrow Y_n\overset{L^1}{\not\to}0$

Rmk: $\exists$ 鞅, $X_n\xrightarrow{a.s.}0$
$\exists$ 鞅 X_n 不满足 a.s. 收敛

□. 取值同样随机游走 (节面)

eg. 设 ξ_n 独立.

$\mathbb{P}(\xi_n=1)=1-\frac{1}{n^2}$

$\mathbb{P}(\xi_n=1-n^2)=\frac{1}{n^2}$

$Y_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ ~~为鞅~~ 鞅.

$\sum\mathbb{P}(\xi_n=1-n^2)<\infty$

$\therefore\mathbb{P}(\xi_n=1-n^2\ i.o.)=0$

$\therefore$ a.s. $\xi_n=1$ n 充分大

$Y_n\to\infty$ a.s

$\therefore\exists$ 鞅 $E|X_n|\to\infty$ 但收敛到一个有穷的极限

例. X_n 为取非负整数值的马氏链

$\mathbb{P}(X_1=n+1|X_0=n)=1-\mathbb{P}(X_1=\frac{n+1}{n+2}|X_0=n)$
$=\frac{2n+1}{2n+2}$

□ $\mathbb{P}(X_1=k|X_0=-1)=1.\quad n=0,1,2\quad k=1,2\ldots$

设 $X_0=0$ 下面证明: X_n 收敛.

$\mathbb{P}(X_n \text{ converges}) = 1-\mathbb{P}(X_n \neq 0, \forall n)$

$= 1-\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$

$k \le n$:

$\mathbb{P}(X_n = \pm k) = \mathbb{P}(X_0=0, \dots, X_{k-1}=k-1, X_k=\pm k)$

$= \frac{1}{2k}\prod_{i=k}^{n} \frac{2i+1}{2i+2} \ge \frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+2}$

□

再找一 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ 但 $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$

$\mathbb{P}(X_n = \pm 1 \mid X_{n-1}=0) = \frac{1}{2n}$

$\mathbb{P}(X_n=0 \mid X_{n-1}=0) = 1-\frac{1}{n}$

$\mathbb{P}(X_n = nX_{n-1} \mid X_{n-1}\neq 0) = \frac{1}{n} = 1-\mathbb{P}(X_n=0\mid X_{n-1}\neq 0)$

设 $X_0=0$ $\mathbb{P}(X_n=0) = 1-\frac{1}{n} \to 1$.

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

但 $\mathbb{P}(X_n \neq 0 \text{ i.o.}) = 1$.

$\Vert$

$\mathbb{P}(\sum \underbrace{\mathbb{P}(X_n\neq 0 \mid X_1 \dots X_{n-1})}_{=\frac{1}{n}} = \infty) = 1$.

∴ $X_n \not\xrightarrow{a.s.} 0$.

Recall: 鞅收敛定理.

$\left.\begin{array}{l}\sup_n EX_n^+ < \infty \\ \text{下鞅}\end{array}\right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X$

a.e. 收敛 + U.I. $\to L^1$ 收敛.

$\Downarrow$

$\sup EX_n^+<\infty \Rightarrow$ a.s.

Thm: 设 X_n 下鞅. t.f.a.e.

(1) $\{X_n\}$ 一致可积.

(2) X_n a.s. 且 L^1 收敛

(3) X_n ~~a.s.~~ L^1 收敛.

证明: (1)⇒(2) $\{X_n\}$ U.I.

∴ $\sup_n EX_n^+<\infty$ 由鞅收敛定理. X_n a.s. 收敛

而由 Vitali 收敛定理. $X_n \xrightarrow{L^1} X$

(2)⇒(3): Trivial;

(3)⇒(1):

$\sup_A |E|X_n|1_A - E|X|1_A|$

$\le E|X_n - X| \to 0$

∴ $\exists n_0$, $\forall n \ge n_0$

$E|X_n|1_A \le E|X|1_A + \frac{\varepsilon}{2}$.

choose A. $P(A)<\delta$

$\Rightarrow E|X|1_A < \frac{\varepsilon}{2}$.

∴ $\sup_{n\ge n_0} E|X_n|1_A < \varepsilon$.

□

(4): ∃ 可积 X, $X_n = E[X|\mathcal{F}_n]$.

(4)⇒(1). 利用 $\{E[X|\mathcal{G}]\}$ U.I.

(1)⇒(4).

由(1), ∃X. $X_n \xrightarrow{L^1} X$. 要证 $X_n = E[X|\mathcal{F}_n]$ a.s.

即 $\forall A\in\mathcal{F}_n$. $EX_n 1_A = E X 1_A$

而 $\forall m > n$ $EX_n 1_A = EX_m 1_A$. $m\to\infty$

□

(4)': X_n 为一致可积下鞅 则 $X_n \le E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$

则欲证 $\forall A\in\mathcal{F}_n$. $EX_n1_A \le EX_\infty 1_A$.

$\Uparrow$

$\forall A\in \mathcal{F}_n$, $E[(X_n - E[X_\infty|\mathcal{F}_n])1_A] \le 0$

$A_\varepsilon = \{X_n - E[X_\infty|\mathcal{F}_n] \ge \varepsilon\}$.

$\Uparrow$

$0 \ge \varepsilon\mathbb{P}(A_\varepsilon)$. $\mathbb{P}(A_\varepsilon)=0$

$\Rightarrow$ ~~$\mathbb{P}$-a.s.~~ $X_n \le E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ a.s.

Thm: $X \in L^1$, $\mathcal{F}_n$ 为单调增加
则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \xrightarrow[L^1]{a.s.} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]$

pf: $M_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ 为一致可积鞅.

$\therefore \exists \eta \in L^1$. $\underbrace{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]}_{\in \mathcal{F}_\infty} \xrightarrow[L^1]{a.s.} \eta \in \mathcal{F}_\infty$

下证 $\eta \overset{a.s.}{=} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]$

i.e. $\forall A \in \mathcal{F}_\infty$ $\mathbb{E}[\eta 1_A] = \mathbb{E}[X 1_A]$

$\forall A \in \mathcal{F}_n$. $\mathbb{E}[\eta 1_A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] 1_A]$
$= \mathbb{E}[X 1_A]$

$\forall n$ 成立. 取并. 由 π-λ Thm $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[\eta 1_A] = \mathbb{E}[X 1_A]$ $\forall A \in \mathcal{F}_\infty$

□

Cor: $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$ 则 $\forall A \in \mathcal{F}_\infty$ $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_n) \to 1_A$ a.s. (Lévy) □.

下用 ~~Kolmogorov~~ Lévy 0-1律证明 Kolmogorov 0-1律.

$X_1, X_2 \dots$ 独立. $\mathcal{T}$ 为尾事件. $\mathcal{T} = \bigcap_n \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$

若 $A \in \mathcal{T}$ 则 $P(A) = 0$ or 1.

pf: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1 \dots X_n) \nearrow \mathcal{F}_\infty = \sigma(X_1, \dots)$.

$\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_\infty) \to 1_A$ a.s.

A 与 $\mathcal{F}_n$ 独立 $\therefore P(A|\mathcal{F}_n) = P(A)$. $\forall n$.

$\therefore \mathbb{P}(A) = 1_A$ a.s. $\therefore$ 仅为 0.1. □.

Cor: Y_n r.v. 若 $\exists Y, Z \in L^1$. $Y_n \to Y$ a.s. $|Y_n| \le Z$ a.s.
则 $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] \xrightarrow[L^1]{a.s.} \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_\infty]$

证明: $\cancel{\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n] \xrightarrow[L^1]{} \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_\infty]}$

$\mathbb{E}\big|\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]\big|$
$\le \mathbb{E}|Y_n - Y|$

$\therefore \mathbb{E}\big|\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_\infty]\big|$
$\le \mathbb{E}\big|\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]\big|$
$+ \mathbb{E}\big|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_\infty]\big|$
$\to 0$ as $n \to \infty$

$\therefore L^1$ ✓

对 a.s. 收敛.

$\forall n \ge m$.

$\mathbb{E}(\inf_{k\ge m} Y_k|\mathcal{F}_n) \le \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n]$
$\le \mathbb{E}[\sup_{k\ge m} Y_k|\mathcal{F}_n]$

$n\to\infty$ $\mathbb{E}[\inf_{k\ge m} Y_k|\mathcal{F}_\infty] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n]$
$\le \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n]$
$\le \mathbb{E}[\sup_{k\ge m} Y_k|\mathcal{F}_\infty]$

$m\to\infty$. $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] \to \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_\infty]$ a.s.

□

L^p 收敛:

$$
\begin{tikzcd}
X_n \xrightarrow{L^p} X \arrow[r, Rightarrow] & X_n \xrightarrow{L^1} X \arrow[r, Rightarrow] & X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \arrow[ll, bend left, Rightarrow, "一致L^p可积"]
\end{tikzcd}
$$

Thm: 若 X_n 为鞅 或非负下鞅. $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$
则 $X_n \xrightarrow[L^p]{a.s.} X$ $p \geqslant 1$

证明: $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty \Rightarrow X_n$ 一致可积.

$\sup_n \mathbb{E}[|X_n| 1_{\{|X_n| \ge M\}}]$
$\le \sup_n \mathbb{E}[|X_n| \frac{|X_n|^{p-1}}{M^{p-1}} 1_{\{|X_n| \ge M\}}]$
$\le \sup_n \frac{\mathbb{E}|X_n|^p}{M^{p-1}} \to 0$ as $M \to \infty$

$\therefore X_n \xrightarrow[L^1]{a.s.} X$.

X 为鞅. $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$.
$|X_n|^p \le \mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{F}_n]$ 一致可积.
$\Rightarrow |X_n|^p$ 一致可积
$\therefore X_n \xrightarrow{L^p} X$

□

X 为非负下鞅: $0 \le X_n \le \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$

$|X_n|^p \le \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]^p$
$\le \mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{F}_n]$

$X_n \xrightarrow{L^p} X$ □.

§3.3：倒向鞅.

$\mathcal{F}_n\downarrow$. $\{\dots, X_n, X_{n-1},\dots,X_1\}$ 为鞅.

$E[X_n|\mathcal{F}_{n+1}] = X_{n+1}$.

$\{X_n;\mathcal{F}_n; n\le 0\}$ ~~若~~ 为鞅 $\mathcal{F}_n\uparrow$ as $n\to\infty$

$E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$. $\forall n\in Z_{\le 0}$.

Thm (倒向鞅收敛定理)

$\{X_n;\mathcal{F}_n\}_{n\le 0}$ 为倒向下鞅 则 $\exists X_{-\infty}$

s.t. $X_n\to X_{-\infty}$ a.s.

进一步 $\inf_n EX_n > -\infty$ 则 X_n 一致可积. $X_{-\infty}$可积.

$X_n \xrightarrow{L^1} X_{-\infty}$ as $n\downarrow -\infty$.

此时 $\forall n\in Z_-$ $E[X_n|\mathcal{F}_n]\ge X_{-\infty}$.

□

X_n 为鞅. $X_n = E(X_0|\mathcal{F}_n)$ $n\le 0$.

设 $X\in L^1$. $E[X|\mathcal{F}_n] \xrightarrow[L^1]{a.s.} X_{-\infty} := E[X|\mathcal{F}_{-\infty}]$ $n\to-\infty$

若 $\mathcal{F}_n \downarrow \mathcal{F}_{-\infty}$ 则也有 $E(X|\mathcal{F}_n) \xrightarrow[L^1]{a.s.} E(X|\mathcal{F}_{-\infty})$.

eg: $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1},\dots) \downarrow \mathcal{F}_{\infty}$.

$E[X_1|\mathcal{F}_n] \to E[X_1|\mathcal{F}_\infty]$

$\overset{\|}{E}[X_1|S_n, S_{n+1}\dots] = E[X_1|S_n]$.

$\therefore \forall\ 1\le i\le n$. $E[X_i|S_n] \overset{a.s}{=} E[X_1|S_n]$

$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}E[X_i|\mathcal{F}_n]$

$\therefore E[X_1|\mathcal{F}_n] = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s} E[X_1|\mathcal{F}_\infty] \stackrel{?}{=} EX_1$ ☆

$E[X_1|\mathcal{F}_\infty] = \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ 尾事件 $\in \mathcal{T}$.

由 Kolmogorov 0-1律. $E(X_1|\mathcal{F}_{-\infty}) = const$ a.s. $= E[E[X|\mathcal{F}_\infty]] = EX_1$.

令 $Y_n = \frac{S_n}{n}$. $n>0$ $\mathcal{F}_{-n} = \mathcal{F}_n$.

$E[Y_{-n}|\mathcal{F}_{-n-1}] = Y_{-n-1}$

$= E[\frac{S_n}{n}|S_{n+1}, S_{n+2}..]$

$= E[X_1|S_{n+1}\dots]$

$= \frac{S_{n+1}}{n+1}$

□

证明: $\forall N\in Z_+$. $\{X_{-N}, X_{-N+1},\dots, X_0\}$ 下鞅.

$U[a,b];N) \le \frac{E(X_0-a)^+ - E(X_{-N}-a)^+}{b-a}$

$\le \frac{1}{b-a}E(X_0-a)^+ < \infty$

$N\to\infty$. 由 Fatou 引理知 $EU[a,b]<\infty$

$U[a,b]<\infty$ a.s.

$\Rightarrow P(\liminf_n X_n < a < b < \limsup_n X_n) = 0$

~~X_n~~ $\lim_{n\to\infty}$ a.s. 存 □

再证后半部分. 若X_n为鞅 则 $X_n = E[X_0|\mathcal{F}_n]$ $n\le 0$

$\Rightarrow$ U.I.

为证L^1收敛, 只需证一致可积.

对鞅而言,结论显然. 则对下鞅作 Doob 分解

$X_n = M_n + A_n$

$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n + A_{n+1}$.

$A_{n+1} - A_n = E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n)$.

$A_n = \sum_{k=1}^{n} E[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]$

令 $\alpha_n = E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \ge 0$

$E\sum_{n=0}^{-\infty}\alpha_n = \sum_{n=0}^{-\infty}E\alpha_n$

$= \sum_{n=0}^{-\infty}(EX_n - EX_{n-1})$

$= EX_0 - \lim_{n\to\infty} EX_n < \infty$

$\therefore \sum_{n=0}^{-\infty}\alpha_n < \infty$ a.s.

$A_n = \sum_{k=n}^{-\infty}\alpha_k$ 可料. $M_n = X_n - A_n$ 是鞅

则M_n一致可积.

Q. ~~…~~ $\Rightarrow A_n$一致可积.

$\Rightarrow Y_n$一致可积,

再证 $X_{-\infty}$可积:

$E|X_{-\infty}| \le \liminf_{n\to-\infty} E|X_n| < \infty$

但未证 $(X_{-\infty}, X_n; n\le 0)$ 为下鞅

□

二方向

$E[X_n|\mathcal{F}_{-\infty}] \geq X_{-\infty} \iff \forall A \in \mathcal{F}_{-\infty}\ E[X_n 1_A] \geq E[X_{-\infty} 1_A]$

$\Rightarrow$: 显然

$\Leftarrow$: $E[(E[X|\mathcal{F}_n] - X_{-\infty}) 1_A] \geq 0$

令 $A = \{E[X_n|\mathcal{F}_n] - X_{-\infty} < -\varepsilon\}$

$\Rightarrow -\varepsilon P(A) \geq 0 \quad \therefore P(A) = 0$

令 $\varepsilon \to 0$ 有 (+ π-λ定理)

$E[X_n|\mathcal{F}_{-\infty}] \geq X_{-\infty}$ a.s.

$\forall n \geq m$. $E[X 1_A] \geq E[X_{m} 1_A] \to E[X_{-\infty} 1_A]$ □.

$(X_n, \mathcal{F}_n)$ 为倒向鞅 则 $X_n \xrightarrow[\text{或 a.s}]{L^1} X_{-\infty} \overset{a.s}{=} E[X_n|\mathcal{F}_{-\infty}]$

$X_n = E[X|\mathcal{F}_n] \xrightarrow[L^1]{a.s.} X_{-\infty} = E[X|\mathcal{F}_{-\infty}]$

若 $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty \Rightarrow E[X|\mathcal{F}_n] \to E[X|\mathcal{F}_\infty]$

从而, 若 $X \in L^1$, $\mathcal{F}_n \downarrow \mathcal{F}_\infty$ or $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$

则 $E[X|\mathcal{F}_n] \xrightarrow[L^1]{a.s.} E[X|\mathcal{F}_\infty]$

§3.4: 例子

1. 鞅差有界

M_n 为鞅 $\exists C < \infty$ $|\Delta M| = |M_n - M_{n-1}| \leq C$ a.s.

令 $C = \{\lim_{n\to\infty} M_n \ \exists \text{ finite}\}$

$D = \{\limsup_{n\to\infty} M_n = \infty \quad \liminf_{n\to\infty} M_n = -\infty\}$

则 $P(C \cup D) = 1$.

证: 即证 D^c 上 $\lim_{n\to\infty} M_n \ \exists$ a.s.

令 $\tau_m = \inf\{n;\ M_n \geq m\}$

则 $M_{\tau_m \wedge n}$ 为鞅. $\leq C + m$.

因 $\begin{cases} n > \tau_m. & M_{\tau_m} \leq M_{\tau_m - 1} + \Delta M_{\tau_m} \leq m + c \\ n < \tau_m. & M_{\tau_m} \leq M_n \leq m. \end{cases}$

$\Rightarrow \sup_n E X^+_{\tau_m \wedge n} < \infty$. 由鞅收敛 Thm.

$M_{\tau_m \wedge n}$ a.s. 收敛,

在 $\{\sup_k M_k < m\}$ 上 $\{M_n = M_{\tau_m \wedge n}\}$ a.s. 收敛.

$\uparrow$ 对应 $\tau_m = \infty$

$\therefore$ 在 $\bigcup_m \{\sup_k M_k < m\}$ 上 M_n a.s. 收敛

$\{-\infty < \liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} < +\infty\} \Rightarrow D^c$ 上 a.s. □.

2. 第二 Borel-Cantelli 引理

$\forall$ 滤流 $\{\mathcal{F}_n\}$, $A_n \in \mathcal{F}_n$. 则 $\{A_n \text{ i.o.}\} \overset{a.s.}{=} \{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = +\infty\}$

证明:

$\{A_n \text{ i.o.}\} = \{\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} = \infty\}$

构造鞅. $M_n = \sum_{k=1}^{n} (1_{A_k} - P(A_k|\mathcal{F}_{k-1}))$.

M_n 为鞅. 且 $|\Delta M_n| \leq 1$

C, D 如上

C 上. $\{\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} = \infty\} = \{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty\}$

D 上. $\{\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} = \infty\}$. 且 $\{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty\}$

而 $P(C \cup D) = 1$

$\therefore \{A_n \text{ i.o.}\} = \{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty\}$ □.

从而若 A_n 独立. $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$.

令 $\mathcal{F}_n = \sigma(A_1 \dots A_n)$

$\Rightarrow \sum P(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \sum P(A_n) = \infty$.

$\Rightarrow P(A_n \text{ i.o.}) = 1$. □.

3. 可交换序列: 条件独立同分布

称有限 r.v. 序列 $\{X_1 \dots X_N\}$ 可交换,

若对 $\{1, 2, \dots, N\}$ 的任一置换 π 成立

$(X_1 \dots X_N) \overset{d}{=} (X_{\pi(1)} \dots X_{\pi(N)})$

称 $(X_1, X_2 \dots)$ 可交换. 若 $\forall n$. $(X_1, \dots, X_n)$ 可交换

eg: $X_1, \dots, X_n$ i.i.d.

$\frac{X_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}, \dots, \frac{X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$. 不独立, 但可交换.

eg: $X_1 \dots X_n$ 是从 A 中不放回地抽取出来的 r.v. 则 可交换.

$\mathcal{E}_n \subset \sigma(X_1 \dots X_n)$ 由置换不变下事件 A 组成: 若 $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$

s.t. $A = \{(X_1, \dots X_n, X_{n+1}, \dots) \in B\}$ 对 $\{1, 2, \dots n\}$ 的任一置换 π. 有 $A = \{(X_{\pi(1)} \dots X_{\pi(n)}, X_{n+1} \dots) \in B\}$

$\mathcal{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$: 可交换 σ-代数.

Thm: De Finetti:

设 $X_1, X_2 \dots$ 可交换，则在 $\mathcal{E}$ 条件下

$X_1, X_2, \dots$ 条件独立 iid.

即 $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n f_i(X_i)|\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(f(X_i)|\mathcal{E})$

$\mathbb{E}(f(X_i)|\mathcal{E}) = \mathbb{E}(f(X_1)|\mathcal{E})$. □

Thm: Hewitt-Savage 0-1 Law:

$X_1, X_2, \dots$ iid. $A \in \mathcal{E}$. 则 $P(A)=0$ or 1.

证明: $\forall \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可测

$$\mathbb{E}[\varphi(X_1,\dots X_n)|\mathcal{E}] = \mathbb{E}[\varphi(X_1\dots X_n)|\mathcal{T}]$$
$$= \underbrace{\mathbb{E}[\varphi(X_1\dots X_n)]}_{与\mathcal{E}独立}$$

$\Rightarrow \sigma(X_1,\dots X_n)$ 与 $\mathcal{E}$ 独立

$\Rightarrow \sigma(X_1, X_2 \dots)$ 与 $\mathcal{E}$ 独立.

$\mathcal{E} \subseteq \sigma(X_1, \dots X_n)$

$\Rightarrow \mathcal{E}$ 与 $\mathcal{E}$ 独立 □.

§3.5. Doob 停时定理

T 是停时. X 为鞅

$EX_T \overset{?}{=} EX_0$

- 不成立的 Case:

$Y_1 \dots Y_n$ iid. $P(Y_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

$X_n = \sum_{i=1}^n Y_i \quad T = \inf\{n: X_n = 1\} < \infty$ a.s.

$EX_T = 1 \neq 0 = EX_0$

但 T 为有界停时 ~~则~~ 正确

鞅之情形: a.s. 意义下:

(1) $S \le T$. $EX_S = EX_T$

(2). $S \le T$. $E(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$

(3) $E(X_T|\mathcal{F}_S) = X_{S\wedge T}$

(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3)

Thm ~~有界~~ X_n 为 (下) 鞅. 则

以下等价

(1) $\forall$ 停时 $S \le T$, $EX_T \overset{(\ge)}{=} EX_S$

(2) $\forall$ 停时. $S \le T$. $E(X_T|\mathcal{F}_S) \overset{(\ge)}{=} X_S$

(3). $\forall$ 停时 $S.T.$ $E[X_T|\mathcal{F}_S] \overset{(\ge)}{=} X_{S\wedge T}$

pf: (3) $\Rightarrow$ (1). 易知.

(1) $\Rightarrow$ (2).

$\forall A \in \mathcal{F}_S$. 要证 $EX_S 1_A = EX_T 1_A$.

令 $M = S1_A + T1_{A^c}$

$\{M=n\} = \{S=n\}\cap A + \{T=n\}\cap A^c \in \mathcal{F}_n$.

$M \le T$. $\therefore EX_M = EX_T$

$\overset{\shortparallel}{E}X_S 1_A + EX_T 1_{A^c}$.

$\therefore EX_S 1_A = EX_T 1_A$

(2) $\Rightarrow$ (3). $\{S \le T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T} \subseteq \mathcal{F}_S$

$\mathcal{F}_S \cap \{S \le T\} = \mathcal{F}_{S\wedge T} \cap \{S \le T\}$

$\{S \le T\}$ 上

$E(X_T|\mathcal{F}_S) = E(X_T|\mathcal{F}_{S\wedge T}) = X_T = X_{S\wedge T}$

$\{S > T\}$ 上

$E(X_T|\mathcal{F}_S) = E(X_T|\mathcal{F}_{S\vee T})$.

$= X_T = X_{S\wedge T}$ □

Rmk: 停时定理一般成立以下2种情况时.

(1) 停时有界

(2) 一致可积.

Thm 有界停时定理

设 X 是 (F) 鞅. 若 S, T 为停时. 则 $E(X_T|F_S) \overset{(\geq)}{=} X_{S\wedge T}$ a.s

iff $\Longleftrightarrow$ $\forall$ 有界停时 $S\leq T$, $EX_T \overset{\geq}{=} EX_S$

作鞅 $\{X_{T\wedge n}\}$ $T\leq M$ 全 n.

$EX_{T\wedge n} = EX_0$.

则 $EX_T = EX_{T\wedge n} = EX_0$

$\therefore \forall S\leq T$ 有 $EX_T = EX_S$

下鞅: 令 $K_k = 1_{\{S<k\leq T\}}$.

$\{S<k\leq T\} = \{S\leq k-1\}\cap\{T\leq k-1\}^c \in F_{k-1}$

K_k 可料

$$(K\cdot X)_n = \sum_{k=1}^n K_k(X_k - X_{k-1})$$
$$= \sum_{k=1}^n 1_{\{S<k\leq T\}}(X_k - X_{k-1})$$
$$= \sum_{k=S\wedge n+1}^{T\wedge n}(X_k - X_{k-1})$$
$$= X_{T\wedge n} - X_{S\wedge n}.$$

$\because E(K\cdot X)_n \geq E(K\cdot X)_0$

$\therefore EX_{T\wedge n} \geq EX_{S\wedge n}$

因 $S\leq T\leq M$. 令 $n=M$. 有 $EX_T\geq EX_S$.

• 对一般的 T. 一般先用有界停时 $T\wedge n$ 代替, 再令 $n\to\infty$

由鞅收敛定理 ✓.

设 X 为非负上鞅 $S\leq T$ 为停时. 则有 $E(X_T|F_S)\leq X_S$ a.s.

Proof: $E(X_{T\wedge n}|F_S)\leq X_{S\wedge n}$. $\forall n\in\mathbb{Z}_+$

$n\to\infty$. 由于非负上鞅必收敛 $\Rightarrow$ RHS $\to X_S$.

而 $E(X_T|F_S) = E(\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}|F_S)$

$\leq \liminf_{n\to\infty} E[X_{T\wedge n}|F_S]$

$\leq \liminf_{n\to\infty} X_{S\wedge n} = X_S$ □.

只能 $X_{T\wedge n}\xrightarrow{L^1} X_n$.

而 $X_{T\wedge N}\xrightarrow{a.s.} X_T$.

$X_{T\wedge n}$ U.I.: $X_{T\wedge n}\xrightarrow[L^1]{a.s.} X$ $\Rightarrow$ $X = X_T$ a.s.

$X_{T\wedge n}\xrightarrow{L^1} X_T$. $\therefore EX_{T\wedge n}1_A\to EX_T 1_A$.

又 $X_{T\wedge n}$. U.I. 下鞅 引理 $Y_{T\wedge S\wedge n}$ 为一致可积. $EX_{T\wedge S\wedge n}1_A\to EX_{T\wedge S}1_A$.

Thm S, T 为2个停时. 若 $\{X_{T\wedge n}\}$ 为一致可积鞅, 则 $E(X_T|F_S)\overset{\geq}{=} X_{S\wedge T}$ a.s.

Lem: 设 X_n 为一致可积下鞅. 则 $\forall$ 停时 N. $\{X_{n\wedge N}\}$ 一致可积

以上引理 $\to$ X 一致可积, $\to$ 停时定理成立

若 X 为鞅. X_n U.I. $\Rightarrow$ $X_n\xrightarrow[L^1]{a.s.} X_\infty$

$X_n = E[X_\infty|F_n]$ $\Rightarrow$ $X_T = E[X_\infty|F_T]$

$\Rightarrow \{X_T, \forall T\}$ U.I.

若 X 为下鞅.

$$E[|X_{n\wedge N}|1_{\{|X_{n\wedge N}|\geq k\}}]$$
$$= E[|X_{n\wedge N}|1_{\{|X_{n\wedge N}|>k,\ N\geq n\}}]$$
$$+ E[|X_{n\wedge N}|1_{\{|X_{n\wedge N}|>k,\ N<n\}}]$$
$$\leq E[|X_n|1_{\{|X_n|>k\}}] + E[|X_N|1_{\{|X_N|>k\}}]$$

$\Downarrow$ 0. $\overline{\{X_N\}\text{U.I.?}}$

X_n^+ 下鞅. $EX_{n\wedge N}^+\leq EX_n^+$.

$\sup_n EX_{n\wedge N}^+\leq\sup_n EX_n^+$

$\leq\sup_n E|X_n|<\infty$.

对下鞅 $X_{n\wedge N}$. 由鞅收敛 Thm.

$X_N = \lim_{n\to\infty} X_{n\wedge N}\in L^1$.

由一致可积.

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\sup E[|X_{n\wedge N}|1_{\{|X_{n\wedge N}|>k\}}] = 0$.

证明 Thm: 由有界停时 Thm

$E(X_{T\wedge n}|F_S)\overset{(\geq)}{=} X_{S\wedge T\wedge n}$ a.s.

$\Longleftrightarrow \forall A\in F_S$ $EX_{T\wedge N}1_A \overset{\geq}{=} EX_{S\wedge T\wedge n}1_A$

$\downarrow$

$EX_T 1_A$

□.

Cor: X_n为下鞅, S, T停时.

设以下条件之一成立:

(1) X_n U.I, T任意.

(2) $E|X_T|<\infty$, $\liminf_{n\to\infty} E[|X_n| 1_{\{T>n\}}]=0$

(3) $E|X_T|<\infty$, $X_n 1_{\{T>n\}}$ U.I

(4) $ET<\infty$ 且 a.s. $E[|X_{n+1}-X_n| \mid \mathcal{F}_n] \le B$

(5) $T<\infty$ a.s. 且 $E[\sum_{n=1}^{T} E[|X_n - X_{n-1}| \mid \mathcal{F}_n]]<\infty$

则 $E[X_T \mid \mathcal{F}_S] \underset{(=)}{\ge} X_{S\wedge T}$ a.s.

□

eg: Wald 等式 $X, X_1, \dots, X_n$ iid $\in L^1$. T为停时.

$ET<\infty \Rightarrow ES_T = EX_1\, ET$.

pf: $S_n - nEX_1$ 为鞅. 由(4). $E(S_T - TEX_1) = E(S_0-0)=0$

($S_n^2 - n$为鞅).

~~总结~~

常用的停时定理.

① T有界

② X_n一致可积, T任意

③ $ET<\infty$ $E[|X_{n+1}-X_n| \mid \mathcal{F}_S] \le B$ a.s.

eg: $Y\in L^1$. S, T停时. 则 $E[E[Y\mid \mathcal{F}_S]\mid \mathcal{F}_T] = E[Y\mid \mathcal{F}_{S\wedge T}] = E[E[Y\mid \mathcal{F}_T]\mid \mathcal{F}_S]$

pf: $X_n = E[Y\mid \mathcal{F}_n]$

$E[X_T\mid \mathcal{F}_S] = X_{S\wedge T}$

$X_T = E[Y\mid \mathcal{F}_T] \to \cdots$ □

eg: X非负上鞅 则 $\forall n$. $P(X_n>0, \inf_{0\le k\le n} X_k = 0) = 0$

若有 $P(\inf_{0\le k\le n} X_k = 0)>0$

则 $P(X_n>0 \mid \inf_{0\le k\le n} X_n = 0) = 0$ 0 相当于吸收态

pf: $\sigma = \inf\{m: X_m = 0\}$ $T = \inf\{n>\sigma;\ X_n > a\}$. $a>0$ const

要证 $T<\infty$ a.s. $\forall a>0$.

T停时? $\{T=n\} = \bigcup_{m}^{n} \{T=n, \sigma=m\} \in \mathcal{F}_n$.

由有界停时定理 $EX_{T\wedge n} \le EX_{\sigma\wedge n}$.

$0 \ge EX_{T\wedge n} - EX_{\sigma\wedge n} = \underbrace{E[(X_T - X_\sigma)1_{\{T\le n\}}]}_{\ge aP(T\le n)} + \underbrace{E[(X_n - X_n)1_{\{\sigma> n\}}]}_{0} + E[(X_n - X_0)1_{\{\sigma<n<T\}}]$

§3.6 鞅不等式

Thm: 设 X_n为下鞅, 则 $\forall \lambda>0$

$$\lambda P(\max_{1\le k\le n} X_k \ge \lambda) \le E[X_n 1_{\{\max_{0\le k\le n} X_k \ge\lambda\}}] \le EX_n^+$$

$$\lambda P(\max_{1\le k\le n}|X_k|\ge\lambda) \le 2EX_n^+ - EX_0 \quad (\le 3\max E|X_k|)$$

若 X_n为鞅.

$$\lambda P(\max_{0\le k\le n} |X_k|\ge\lambda) \le E[|X_n| 1_{\{\max|X_k|\ge\lambda\}}] \le E X_n$$

$$P \le \frac{E|X_n|^2}{\lambda^2}$$ □

若 X_n下鞅, h非负单调增

则 $P(\max_{1\le j\le n} X_j \ge x) \le \frac{Eh(tX_n)}{h(tx)}$ $\forall t>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

L^p不等式.

下鞅 (1) $p>1$. $E(\max X_k^+)^p \le (\frac{p}{p-1})^p E(X_n^+)^p$.

(2) $p=1$时. $\log^+ x = \log x \vee 0$. 则

$$E[\max X_k^+] \le \frac{e}{e-1}(1 + EX_n^+\log^+ X_n^+)$$

□

Rmk: 估计 ES_n^p 常用 $\int |f|^p = \int_0^\infty p\alpha^{p-1} P(|f|>\alpha)\, d\alpha$

□