§1. 补充习题.

1. 对任意 r.v 序列 X_n, 证明:

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Rightarrow \frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

$X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$

$X_n \xrightarrow{L^p} 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^p} 0 \quad p \geq 1$

举反例. 说明 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \not\Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

证明:

(2). 由 Stolz 定理可得.

(1). $\forall \varepsilon > 0$, $\frac{X_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n}$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - S_{n-1}}{n}\right| > \varepsilon\right)$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{n-1}}{n-1}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n}{n-1}\right)$$

$\to 0$ as $n \to \infty$.

(3). $\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n}\right|^p \leq \frac{\sum_{1}^{n} \mathbb{E}|X_n|^p}{n} \overset{\text{Stolz}}{=} \frac{\mathbb{E}|X_n|^p}{1} \to 0$. □

(4) 反例 $X_n = \begin{cases} 2^n & \text{with Prob. } \frac{1}{n} \\ 0 & \text{with prob. } 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$

$n\mathbb{P}(|X_n| > n) = 1 \not\to 0$.

□

2. 若 $\mathbb{E}|X| < \infty$ 证明 $\forall \varepsilon > 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mathbb{P}(|X| \geq 2^n \varepsilon) < \infty$

证: $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mathbb{P}(|X| \geq 2^n\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(2^k \varepsilon \leq |X| < 2^{k+1}\varepsilon)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}\, 1_{\{2^k\varepsilon \leq |X| < 2^{k+1}\varepsilon\}}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|X|}{2^k\varepsilon} 1_{\{2^k\varepsilon \leq |X| < 2^{k+1}\varepsilon\}}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|X|}{2^{k-n}\varepsilon} 1_{\{2^k\varepsilon \leq |X| < 2^{k+1}\varepsilon\}}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{E}\left[\frac{|X|}{2^{k-n}\varepsilon} 1_{\{2^k\varepsilon \leq |X| < 2^{k+1}\varepsilon\}}\right]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathbb{E}\left[\frac{|X|}{\varepsilon} 1_{\{2^k\varepsilon \leq |X| < 2^{k+1}\varepsilon\}}\right]$$

$$= \frac{2\mathbb{E}|X|}{\varepsilon} < \infty.$$

□

3. X, X' i.i.d. 证明: $\forall p > 0$. $\mathbb{E}|X|^p < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}|X - X'|^p < \infty$

证: $\Rightarrow$:

$$\mathbb{E}|X - X'|^p \leq 2^{p+1}\mathbb{E}|X|^p < \infty.$$

$\Leftarrow$: $\forall x > 0$. 由对称化不等式

$$\mathbb{P}(|X - X'| > x) \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}(|X - mX| \geq x).$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}(|X - X'| \geq x)\, dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}(|X - X'| \geq x)\, dx$$

$$\Rightarrow \infty > \mathbb{E}|X - X'|^p$$

$$\geq \frac{1}{2}\mathbb{E}|X - mX|^p$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^p}\|X - mX\|_p \leq \|X - X'\|_p < \infty.$$

$$X - mX \in L^p \Rightarrow X \in L^p$$

□

4. 举例说明:

X_n i.i.d. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \not\Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$

设 X_n i.i.d.

$$\mathbb{P}(X_n = \pm n) = \frac{c}{n^2 \log n} \quad n \geq 3.$$

$$c = \frac{1}{2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}}$$

先证 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

$$n\mathbb{E}[X_1 1_{\{|X_1| > n\}}] = n\sum_{k > n} \frac{ck}{k^2 \log k}$$

$$\lesssim n \cdot \frac{1}{n \log n} \to 0.$$

$$\frac{1}{n^2} n\mathbb{E}[X_1^2 1_{\{|X_1| \leq n\}}] = \frac{1}{n}\sum_{k=3}^{n} \frac{ck^2}{k^2 \log k}$$

$$\lesssim \frac{1}{\log n} \to 0.$$

∴ 由 Feller's Thm

$$\Rightarrow \frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

$$\Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

下证不 a.s. 趋于 0.

$$\mathbb{P}(|X_1| > n) = O\left(\frac{1}{n \log n}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n) = \infty$$

由第二 Borel-Cantelli 引理 $\mathbb{P}(|X_n| > n \text{ i.o.}) = 1$

$|X_n| = |S_n - S_{n-1}|$

$$\to \mathbb{P}\left(|S_n| > \frac{n}{2} \text{ i.o.}\right) = 1 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \not\xrightarrow{a.s.} 0$$

□

3.(1) 证明: $\forall T \neq t$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nt}\sum_{k\le nT}\frac{(nt)^k}{k!}=\begin{cases}1 & T>t\\ 0 & T<t\end{cases}$$

(2) F 是一個非負 r.v. 的 d.f. $\varphi(t)=\int_0^\infty e^{-tx}dF(x)$, $\lambda>0$

证明: $\forall T>0$ $\sum_{k\le nT}\frac{(-n)^k}{k!}\varphi^{(k)}(n)\to F(T)$

证明: (1) $X_n\sim Poi(t)$. $EX_n=t$ $S_n=X_1+\dots+X_n\sim Poi(nt)$

由弱大数律 $\frac{S_n-nt}{n}\xrightarrow{P}0 \Rightarrow \frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}t$

$T<t$ 时, $\exists\varepsilon>0$ $\frac{T}{t}<1-\varepsilon$

$$e^{-nt}\sum_{k\le nT}\frac{(nt)^k}{k!}=\mathbb{P}(tS_n\le Tn)$$
$$\le \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\le 1-\varepsilon\right)\to 0 \text{ as } n\to\infty.$$

$T>t$ 时, $\exists\varepsilon>0$, $1+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{T}{t}<\varepsilon+1$.

$\therefore \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\le 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)<\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\le\frac{T}{t}\right)\le\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\le 1+\varepsilon\right)$.

$n\to\infty$ 有 $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\le\frac{T}{t}\right)\to 1$.

(2) $$T_n=\sum_{k\le nT}\frac{(-n)^k}{k!}\varphi^{(k)}(n)=\int_0^\infty\sum_{k\le nT}e^{-nt}\frac{(nt)^k}{k!}dF(t)$$

$$=\int_0^T\sum_{k\le nT}e^{-nt}\frac{(nt)^k}{k!}dF(t)+\int_T^\infty\sum_{k\le nT}e^{-nt}\frac{(nt)^k}{k!}dF(t)$$

$$T_n-F(T)=\int_0^T\left(\sum_{k\le nT}e^{-nt}\frac{(nt)^k}{k!}-1\right)dF(t)$$
$$+\int_T^\infty\sum_{k\le nT}e^{-nt}\frac{(nt)}{k!}dF(t)$$
$$\Rightarrow 1-1+0=0 \quad \text{as} \quad n\to\infty$$

□

4. $X, X_1, X_2, \dots$ iid. 非负. 若极限 $\lim_{s\to\infty}\frac{\mathbb{E}[X1_{\{X\le s\}}]}{s\mathbb{P}(X>s)}=\infty$. 证明: 存在常数列 $\{a_n\}$ s.t. $\frac{S_n}{a_n}\xrightarrow{P}1$

证明: 令 $\mu(s)=\mathbb{E}[X1_{\{X\le s\}}]$.

$$\nu(s)=\frac{\mu(s)}{s\mathbb{P}(X>s)}\to\infty$$

则 $\frac{\mu(s)}{s}=\int_0^\infty\frac{x}{s}dF(x)\xrightarrow{DCT}0$

$\therefore \forall n$ $\exists s_n$, $s_n\to\infty$ $\frac{\mu(s_n)}{s_n}=\frac{1}{n}$

$$n\mathbb{P}(|X_n|>s_n)=\frac{s_n(1-F(s_n))}{\mu(s_n)}=\frac{1}{\nu(s_n)}\to 0$$

$$\frac{1}{s_n^2}n\mathbb{E}[X_n^2 1_{\{X_n\le s_n\}}]$$
$$=\frac{\int_0^{s_n}2x\,\mathbb{P}(X>x)dx}{\int_0^{s_n}\mu(x)dx}\to 0$$

$\therefore \frac{S_n}{s_n}\xrightarrow{P}1$

□.

5. $\{X, X_n\}$ iid. $\forall x>0$ $\mathbb{P}(|X|>x)>0$

证明: $\forall n\in\mathbb{N}$. $\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbb{P}(\max_{1\le k\le n}|X_k|>x)}{n\mathbb{P}(|X|>x)}=1$.

证: $$\mathbb{P}(\max_{1\le k\le n}|X_k|>x)$$
$$=1-\mathbb{P}(|X_1|\le x,\dots,|X_n|\le x)$$
$$=1-\mathbb{P}(|X|\le x)^n$$
$$=\mathbb{P}(|X|>x)\left(1+\mathbb{P}(|X|\le x)\cdots+\mathbb{P}^{n-1}(|X|\le x)\right)$$

$\Rightarrow$ 原式 $\to\frac{n}{n}=1$.

6. $X_n\xrightarrow{P}0$. 证明: $\liminf_{n\to\infty}|X_n|=0$ a.s.

证明: $X_n\xrightarrow{P}0$. $\exists$ 子列 $X_{n_k}\xrightarrow{a.s.}0$

不妨设 $n_1=1$. 则 $\forall n$. $\exists k$. $n_k\le n<n_{k+1}$.

$$0\le\liminf_{n\to\infty}|X_n|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n}|X_k|\le\lim_{n\to\infty}\inf_{j\ge n}|X_{n_j}|$$
$$=\liminf_{j\to\infty}|X_{n_j}|=0 \quad \text{a.s.}$$

□.

6. 考虑 $\mathbb{Z}^d$ 上的随机游走. $\{X_n\}$ iid. 且服从从 $\{(a_1,\dots,a_d): a_i=\pm1\}$ 上的均匀分布. $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$

证明: $d\geq 3$ 时. $\mathbb{P}(S_n=0\ i.o.)=0$.

证. $S_n=0 \iff$ 每个分量为0 $\implies n=2m.\ m\in\mathbb{Z}_+$.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(S_{2m}=0)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\binom{2m}{m}\cdot 2\cdot\frac{1}{2^{2m}}\right)^d$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2m)!}{m!\,m!}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}}\right)^d$$

由Stirling公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$

∴ 上式 同敛散于

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{4\pi m}\cdot\frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}}}{\frac{m^m}{e^m}\cdot\frac{m^m}{e^m}\cdot 2\pi m}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}}\right)^d$$

$$\lesssim\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{d/2}}<\infty\quad(d\geq3)$$

∴ $\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(S_{2m}=0)<\infty \Rightarrow \mathbb{P}(S_{2m}=0\ i.o.)=0$

又 $\mathbb{P}(S_{2m-1}=0)=0$

∴ $\mathbb{P}(S_n=0\ i.o.)=0$. □

7. $X, X_1,\dots,X_n$ iid 非负.

证明 (1) $\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=\begin{cases}0 & EX<\infty\\ \infty & EX=\infty\end{cases}$

(2) 证明: 若 $EX<\infty$ 时, 对任意 $0<c<1$. 都有 $\sum_n e^{X_n}c^n<\infty$ a.s. $EX=\infty$ 时, 对任意 $c<1$. 都有 $\sum_n e^{X_n}c^n=\infty$ a.s.

证: (1) $EX=\infty$. 则

$\forall A>0$ $E[\frac{X}{A}]=\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_n>An)=\infty$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X_n>An\ i.o.)=1$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=\infty$

$EX<\infty$ 则

$\forall A>0$ $E[\frac{X}{A}]<\infty \Rightarrow \mathbb{P}(X_n>An\ i.o.)=0$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=0$.

(2) $e^{X_n}c^n=(ce^{\frac{X_n}{n}})^n$

若 $EX<\infty$ 则 $\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=0\leq\liminf_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}\Rightarrow\frac{X_n}{n}\to0$ a.s.

∴ $\forall\varepsilon\in(0,\log\frac{c+1}{2c})$. $\exists N$ s.t. $\forall n\geq N$ $\frac{X_n}{n}<\varepsilon$

$$\Rightarrow\sum_n(e^{\frac{X_n}{n}}c)^n\leq\sum_{n=1}^{N}(e^{\frac{X_n}{n}}c)^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}(e^{\frac{X_n}{n}}c)^n$$

$$\leq M+\frac{2}{1-c}<\infty$$

$EX=\infty$ 时. $\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=\infty$

$\exists\Omega.\ \mathbb{P}(\Omega)=1$ s.t. $\forall\omega\in\Omega.\ \exists n_k(\omega)$

$\frac{X_{n_k(\omega)}}{n_k(\omega)}>A$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}e^{X_{n_k}(\omega)}c^{n_k}\geq\sum_{k=1}^{\infty}(e^Ac)^{n_k}=\infty\quad a.s.$$

□

8. X_n 独立 $\sim Poi(\lambda_n)$.

证明: 若 $\sum_n\lambda_n=\infty$. 则 $\frac{S_n}{ES_n}\to1$ a.s.

证: 不妨设 $\lambda_n<1$

由Chebyshev不等式

$$\mathbb{P}(|S_n-ES_n|>\delta ES_n)\leq\frac{Var(S_n-ES_n)}{\delta^2E^2S_n}\leq\frac{1}{\delta^2 ES_n}\to0\quad as\ n\to\infty.$$

∴ $\frac{S_n}{ES_n}\xrightarrow{\mathbb{P}}1$

取子列 $n_k=\inf\{n: ES_n\geq k^2\}$ $EX_m\leq1$

则 $k^2\leq ET_k<k^2+1$.

∴ $\mathbb{P}(|T_k-ET_k|>\delta T_k)\leq\frac{1}{\delta^2k^2}$

求和 $<\infty$. 由第-Borel-Cantelli引理

$$\frac{T_k}{ET_k}\xrightarrow{a.s.}1$$

$n_k\leq n<n_{k+1}$

$$\frac{ET_k}{ET_{k+1}}\cdot\frac{T_k}{ET_k}=\frac{T_k}{ET_{k+1}}\leq\frac{S_n}{ES_n}\leq\frac{T_{k+1}}{ET_k}=\frac{T_{k+1}}{ET_{k+1}}\cdot\frac{ET_{k+1}}{ET_k}$$

$k\to\infty$

$$\frac{S_n}{ES_n}\to1\quad a.s.$$

□

9. $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 单增，对 $\forall$ r.v. X

$\mathbb{E} f(X) g(X) \geq \mathbb{E} f(X) \mathbb{E} g(X)$.

$\Updownarrow$

$\mathrm{Cov}(f, g) \geq 0$

证：由 $f \nearrow$

$\therefore (f(x) - f(x'))(g(x) - g(x')) \geq 0$

取期望即有（在未标记问2）

$\cancel{\mathbb{E} f(x)}$ $\therefore 2\,\mathrm{Cov}(f(x), g(x)) \geq 0$

□

10. 独立地掷同一枚硬币，正面出现的概率为 p.

$A_k = \{$第 $2^k \to 2^{k+1}$ 次中间存在连续 k 次正面$\}$

证明：$P(A_k \text{ i.o.}) = \begin{cases} 0 & p < \frac{1}{2} \\ 1 & p > \frac{1}{2} \end{cases}$

证：(1°) $p < \frac{1}{2}$

$E_i = \{$从 $2^k + i - 1$ 次开始连续 k 次正面$\}$

$A_k = \bigcup_{i=1}^{2^k - k} E_i$

$\mathbb{P}(A_k) \leq \sum_{i=1}^{2^k-k} P(E_i) = p^k (2^k - k)$.

$\sum_{k=1}^{\infty} (2^k - k) p^k \leq \sum_k (2p)^k < \infty$

(2°) $p > \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\underbrace{E_1 \cup E_{k+1} \cup \cdots \cup E_{lk+1}}_{\text{这些独立}})$ $\quad l = [\frac{2^{k+1} - k}{k}]$

$= 1 - \mathbb{P}(E_1^c \cap \cdots \cap E_{lk+1}^c)$.

$= 1 - \mathbb{P}(E_1^c)^{l+1} = 1 - (1 - p^k)^{l+1} \geq 1 - (1 - (\frac{1}{2})^k)^{l+1}$

$\cancel{\text{后}}$ $\geq 1 - \exp(-\frac{1}{k}) \sim \frac{1}{k}$

求和 $= \infty$.

□.

11. 考虑 $\mathbb{Z}^2$，每条边以概率为 p 开，$1-p$ 关，独立。

把关的边去掉，证：存在一个无穷路径的概率为 0 or 1.

pf.

因这是尾事件

□.

12. $\{X_n\}$ i.i.d. 分布函数 $F(x)$ 连续，$Y_n = F^{\frac{1}{n}}(X_n)$.

证明：(1) $Y_n \to 1$ a.s.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - Y_n)$ a.s. 发散.

证明：(1) $\because Y_n = \mathbb{P}^{\frac{1}{n}}(X \leq X_n)$，$0 \leq Y_n \leq 1$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(|Y_n - 1| \geq \varepsilon)$

$= \mathbb{P}(Y_n \leq 1 - \varepsilon)$

$= \mathbb{P}(F(X_n) \leq (1-\varepsilon)^n)$

$= \mathbb{P}(X_n \leq F^{-1}((1-\varepsilon)^n)) = (1-\varepsilon)^n$.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^n < \infty$

$\therefore$ 由第一 Borel-Cantelli 引理.

$\mathbb{P}(|1 - Y_n| \geq \varepsilon \text{ i.o.}) = 0$. $\forall \varepsilon > 0$

$\therefore Y_n \xrightarrow{a.s.} 1$.

(2). $\cancel{\text{令}}$ $1 - Y_n = 1 - EY_n + EY_n - Y_n$.

$EY_n = \mathbb{E}[F^{\frac{1}{n}}(X_n)]$

$= \int F^{\frac{1}{n}}(x_n)\, dF(x_n)$.

$= \frac{n}{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (1 - EY_n) \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

$\cancel{EY_n^2}$ 对 $EY_n - Y_n$.

$\mathbb{E}[EY_n - Y_n] = 0$.

又 $EY_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F^{\frac{2}{n}}(x_n)\, dF(x_n)$.

$= \frac{n}{n+2} F^{\frac{2}{n}+1}(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{n}{n+2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(EY_n - Y_n)$

$= EY_n^2 - E^2 Y_n$

$= \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}$

$= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$

求和 $< \infty$. 由一级数定理.

$\sum_{n=1}^{\infty} EY_n - Y_n$ 收敛

$\therefore$ 原级数发散

□

13. 设 $\{X_n\}$ 独立

证明：(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2<\infty$ a.s. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 收敛 a.s. $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[X_n 1_{\{|X_n|\le 1\}}]$ 收敛

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2<\infty$ a.s. $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[|X_n| 1_{\{|X_n|\le 1\}}]^2<\infty$

证：(1) $\Rightarrow$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2<\infty$ a.s.

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛，则由三级数定理

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n 1_{\{|X_n|\le 1\}}]$ 收敛。

$\Leftarrow$：$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[X_n 1_{\{|X_n|\le 1\}}]$ 收敛，

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2<\infty$ a.s.

由三级数定理，

$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n|^2>1)<\infty$ a.s.

而 $|X_n|^2>1 \Longleftrightarrow |X_n|>1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n|>1)<\infty$

再：$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[|X_n|^2 1_{\{|X_n|^2\le 1\}}]$ 收敛

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[|X_n|^2 1_{\{|X_n|\le 1\}}]$ 收敛

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} Var[X_n 1_{\{|X_n|\le 1\}}]$ 收敛

由三级数定理即有结论

(2) $\Leftarrow$ ~~⊖ 由~~ $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛，由三级数定理

- $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n|>1)<\infty$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[X_n 1_{\{|X_n|\le 1\}}]$ 收敛
- $\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n 1_{\{|X_n|\le 1\}})$ ~~收敛~~ $<\infty$.

因 $\forall w\in\Omega$. $|X_n(w)|>1 \Longleftrightarrow |X_n(w)|^2>1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n|^2>1)<\infty$

而 $\mathbb{E}[X_n^2 1_{\{|X_n|\le 1\}}]=\mathbb{E}[(X_n 1_{\{|X_n|\le 1\}})^2]$

$=Var(X_n 1_{\{|X_n|\le 1\}})+(\mathbb{E}[X_n 1_{\{|X_n|\le 1\}}])^2$

求和 $<\infty$

又 $Var(X_n^2 1_{\{|X_n|^2\le 1\}})\le \mathbb{E}[X_n^4 1_{\{|X_n|\le 1\}}]$

$\le \mathbb{E}[X_n^2 1_{\{|X_n|\le 1\}}]$

求和 $<\infty$

由Kolmogorov 三级数定律 知，反过来得证。

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[X_n^2 1_{\{|X_n|\le 1\}}]<\infty \Rightarrow \sum E^2(|X_n| 1_{\{|X_n|\le 1\}})=\sum\mathbb{E}[X_n^2]-\sum Var<\infty$ □

14. $\{X_n; n\ge 1\}$ 同分布，对某个 $p>0$，$E|X_1|^p<\infty$，$\{a_n\}\in\mathbb{Z}$，证：$\frac{X_{a_n}}{n^{1/p}}\to 0$ a.s.

证明：$\forall\varepsilon>0$，

有 $\mathbb{P}(|\frac{X_{a_n}}{n^{1/p}}|\ge\varepsilon)$

$=\mathbb{P}(|X|\ge\varepsilon n^{\frac{1}{p}})$

$=\mathbb{P}(|X|^p\ge\varepsilon^p n)$

求和，上式 $<\infty$ 因 $E|X|^p<\infty$

~~再由布-B-C引理即得~~。 □

15. $\{X, X_n; n\in\mathbb{Z}_+\}$ ~~同分布~~ iid. $P(X=\pm1)=\frac{1}{2}$

$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}$. $n\ge1$. 证明 $U_n\to U$ a.s. 其中 $U\sim U[-1,1]$

证明：~~显~~ U_n 绝对收敛. $\forall w\in\Omega$

$U_n\xrightarrow{a.s.} U$ 下证 $U\sim U[-1,1]$

$\varphi_U(t)=\mathbb{E}[e^{itU}]$

$\overset{DCT}{=}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[e^{itU_n}]$

$=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[e^{i\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}t}]$

$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}[e^{i\frac{X_k}{2^k}t}]$

$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{i\frac{t}{2^k}}+e^{-i\frac{t}{2^k}}}{2}$

$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{t}{2^k}$

$=\frac{\sin t}{t}$ □

16. $\{X, X_n; n\ge1\}$ iid. 证明：

$\frac{\log n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{\log k}\xrightarrow{a.s.}0 \Longleftrightarrow E|X|<\infty$, $EX=0$.

证明：$\Leftarrow$：令 $Y_k=\frac{X_k}{\log k}$ $a_n=\frac{n}{\log n}$

~~只需~~ 需证

① $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|Y_n|>a_n)<\infty$

② $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[\frac{Y_n}{a_n}1_{\{|Y_n|\le a_n\}}]$ 收敛

③ $\sum_{n=1}^{\infty}Var[\frac{Y_n}{a_n}1_{\{|Y_n|\le a_n\}}]<\infty$

$\Leftarrow$ ① $\mathbb{P}(|Y_n| > a_n)$

$= \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\log n}\right| > \frac{n}{\log n}\right)$

$= \mathbb{P}(|X_n| > n)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n) \le \mathbb{E}|X| < \infty$.

③: $\mathrm{Var}\left[\frac{Y_n}{a_n} \mathbb{1}_{\{|Y_n| \le a_n\}}\right]$

$\le \mathbb{E}\left[\frac{Y_n^2}{a_n^2} \mathbb{1}_{\{|Y_n| \le a_n\}}\right]$

$= \mathbb{E}\left[\frac{X_n^2}{n^2} \mathbb{1}_{\{|X_n| \le n\}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{n^2} \mathbb{1}_{\{|X| \le n\}}\right]$

∴ 求和 $= \mathbb{E}\left[\sum_{n=|X|}^{\infty} \frac{X^2}{n^2}\right]$

$\lesssim \mathbb{E}|X| < \infty$

余下只用证②. 即 $\mathbb{E}\left[\frac{Y_n}{a_n} \mathbb{1}_{\{|Y_n| \le a_n\}}\right]$ 收敛

令 $Z_n = Y_n \mathbb{1}_{\{|Y_n| \le a_n\}}$

由③有 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, Z_n^2 < \infty$ 又因 $\mathbb{E}[Z_n - \mathbb{E}Z_n] = 0$

∴ 由一级数定理. $\sum_{n} \frac{Z_n - \mathbb{E}Z_n}{n}$ a.s. 收敛

由Kronecker引理. $\sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k - \mathbb{E}Z_k}{a_n} \xrightarrow{a.s.} 0$

∴ ② $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}Z_k}{a_n} \to 0$ a.s.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \ne Z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > a_n) \overset{①}{<} \infty$

∴ $\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{a_n} \xrightarrow{a.s.} 0$

□.

$\Rightarrow$: 若 $\frac{\log n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{\log k} \to 0$ a.s. $\quad$ ($\frac{X_k}{\log k} = Y_k$)

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n/\log n}\right| > \varepsilon \text{ i.o.}\right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n/\log n}\right| > \varepsilon\right) < \infty$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}|Y_n \log n| = \mathbb{E}|X_n| < \infty$

欲证 $\mathbb{E}X = 0$ ~~若能直接~~ 对. 由$\Leftarrow$;

则由 $\mathbb{E}[X_k - \mathbb{E}X_k] = 0$

$\mathbb{E}|X_n - \mathbb{E}X_n| < \infty$ $\Rightarrow \frac{\log n}{n} \sum \frac{X_k - \mathbb{E}X_k}{\log k} \xrightarrow{a.s.} 0$

∴ $\frac{\log n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{\log k} \overset{a.s.}{=} \frac{\log n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}X_k}{\log k}$. ∴ 若 $\mathbb{E}X \ne 0$ 则RHS $\not\to 0$ 矛盾! □

16. $\{X, X_n, n \in \mathbb{N}\}$ iid. $\mathbb{E}X = 0$ $\mathbb{E}[|X| \log^r |X|] < \infty$

其中 $\log t = \ln\{t \vee e\}$

试证: $\frac{\log^r n}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} 0$

证: $\varphi(x) = |x| \log^r |x|$. $\varphi(x)$ 为……

……关于 $|x|$ 递增.

$Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \le a_n\}} \quad a_n = \frac{n}{\log^r n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n \ne X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > a_n)$.

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{n}{\log^r n}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\varphi(|X|) > \varphi\left(\frac{n}{\log^r n}\right)\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X| \log^r |X| > \underbrace{n - n \frac{\log^r \log^r n}{\log^r n}}_{n - o(n)}\right)$

$\lesssim \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X| \log^r |X| > \frac{n}{2}\right)$

$= 2\mathbb{E}|X| \log^r |X| < \infty$

∴ 只用证 $\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} Y_k \xrightarrow{a.s.} 0$ 由Kronecker引理 只需证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{a_n} < \infty$

为此:

① $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > a_n) = 0$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{Y_n}{a_n}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\frac{Y_n^2}{a_n^2} \overset{|Y_n| \le a_n}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\frac{|Y_n|}{a_n} < \infty$ 下证.

③: $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\mathbb{E}\left[\frac{Y_n}{a_n}\right]\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n} \mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_{\{|X| \le a_n\}}\right]\right|$

$\overset{\mathbb{E}X = 0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n} \mathbb{E}\left[X \mathbb{1}_{\{|X| > a_n\}}\right]\right|$

$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \mathbb{E}\left[|X| \mathbb{1}_{\{|X| > a_n\}}\right]$

$\le \mathbb{E}\left[\sum_{n \le \varphi(|X|)} \frac{|X|}{a_n}\right]$

$\lesssim \mathbb{E} \frac{|X|}{|X| \log^r |X|} = \mathbb{E}\left[|X| \log^r (|X| \log^r |X|)\right]$

$\lesssim \mathbb{E}\left[\log(|X| \log^r |X|)\right] < \infty$

由三级数定理即得

□

§2. 补充习题:

1. 证明 Lindeberg-Feller 定理.

t.f.a.e.

(1) $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \xrightarrow{d} N(0,1)$. 且 $\max_{1\le k\le k_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2] \to 0$.

(2) $\forall \varepsilon>0$. $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{nk}^2 1_{\{|X_{nk}|\ge\varepsilon\}}] \to 0$. □

注：须用到引理:

$\{X_{n,k}\}$ 为独立阵列. $Z\sim N(b,c)$.

且 $\sup_k P(|X_{n,k}|>\varepsilon)\to 0$. $\forall\varepsilon>0$. 则 $\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} \xrightarrow{d} Z$. $(\iff)$

(1) $\sum_{k=1}^{k_n} P(|X_{n,k}|>\varepsilon)\to 0$. $\forall \varepsilon>0$.

(2) $\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{n,k} 1_{\{|X_{n,k}|\le 1\}}] \to b$

(3) $\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{Var}[X_{n,k} 1_{\{|X_{n,k}|\le 1\}}] \to c$. □

2. X, $X_1 \dots X_n$ iid. X 对称

$P(|X|>x)=\frac{1}{x^2}$. $x\ge 1$. 证明: $\frac{S_n}{\sqrt{n\log n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

证: 令 $X_{nk}=\frac{X_k}{a_n}=\frac{X_k}{\sqrt{n\log n}}$.

要证 $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

· 无穷小条件:

$$P(|X_{n,k}|>\varepsilon)=P(|X_k|>\varepsilon\sqrt{n\log n})$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2 n\log n}\to 0.$$

对 as $n\to\infty$ 对 k 一致成立

① $\forall\varepsilon>0$. $\sum_{k=1}^{k_n} P(|X_{n,k}|>\varepsilon)$ $(k_n=n)$

$$=n\cdot P(|X_n|>\varepsilon\sqrt{n\log n})=\frac{1}{\varepsilon^2\log n}\to 0.$$

② $\sum_{k=1}^{n} E[X_{n,k} 1_{\{|X_{n,k}|\le 1\}}] = \frac{nE[X 1_{\{|X|\le\sqrt{n\log n}\}}]}{\sqrt{n\log n}}$

$=0$. 因 X 对称.

③ $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2 1_{\{|X_{n,k}|\le 1\}}] = \frac{n}{n\log n}\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\le\sqrt{n\log n}\}}]$

$$=\frac{1}{\log n}\int_1^{\sqrt{n\log n}} x^2\frac{d}{dx}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{\log(n\log n)}{\log n}\to 1. \ \square$$

3. 证明 Karamata 定理.

X, $X_1,\dots,X_n$ iid.

(1) $\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-m_k)}{a_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$.

(2) $L(x)=\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\le x\}}]$ 在∞处缓变

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 P(|X|>x)}{\mathbb{E}[|X|^2 1_{\{|X|<x\}}]}=0$

(2)+(3)⇒(1)?

证: (2)⇒(3). $\forall r>1$. (但 r 很接近 1).

选取 $x_0>0$ 充分大,使 $L(2x)\le rL(x)$. $\forall x\ge x_0$.

对此 x. $x^2P(|X|>x)$.

$$=x^2\sum_{n=0}^{\infty}P\left(\frac{|X|}{x}\in(2^n,2^{n+1}]\right)$$
$$=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[1_{\{2^n x<|X|\le 2^{n+1}x\}}]$$
$$\overset{x^2\le\frac{|X|^2}{4^n}}{\le}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\mathbb{E}[|X|^2 \underbrace{1_{\{2^n x<|X|\le 2^{n+1}x\}}}_{=1_{\{|X|\le 2^{n+1}x\}}-1_{\{|X|\le 2^n x\}}}]$$
$$\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}(r-1)r^n L(x).$$
$$=\frac{(r-1)}{1-\frac{r}{4}}L(x).$$

$\therefore \frac{x^2P(|X|>x)}{L(x)} = \frac{(r-1)}{1-\frac{r}{4}} \to 0$. as $r\to 1^+$. □

(2)⇒(1). 设 L 在∞缓变.

$$L_m(x):=\mathbb{E}[(X-m)^2 1_{\{|X-m|\le x\}}]$$
$$=\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X-m|\le x\}}]+m\mathbb{E}[(m-2X)1_{\{|X-m|\le x\}}]$$
$$\simeq L(x)$$

$\therefore L_m(x)$ 在∞缓变

不妨 $EX=0$. 令 $a_n=1\vee\sup\{x>0;\ nL(x)\ge x^2\}$ $n\in\mathbb{N}$

$a_n\nearrow\infty$

$nL(a_n)\sim a_n^2$

下面先验~~四条~~

① 无

① 无穷小条件

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{a_n}\right|>\varepsilon\right) \sim \frac{a_n^2\, \mathbb{P}(|X|>a_n\varepsilon)}{n\, L(a_n)}$$

$$\overset{L\text{缓变}}{\sim} \frac{a_n^2\, \mathbb{P}(|X|>a_n\varepsilon)}{n\cdot L(a_n\varepsilon)} \to 0.$$

同样

① $n\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{a_n}\right|>\varepsilon\right) \to 0.$

② $\mathbb{E}X=0 \therefore n\left|\mathbb{E}\left[\frac{X}{a_n}1_{\{|\frac{X}{a_n}|\le 1\}}\right]\right|$

$$\le \frac{n}{a_n}\mathbb{E}\left[|X|1_{\{|X|>a_n\}}\right]$$

$$\sim \frac{C_n}{a_n}\mathbb{E}\left[|X|1_{\{|X|>a_n\}}\right] \to 0.$$

③ $n\,Var\left[\frac{X}{a_n}1_{\{|\frac{X}{a_n}|\le 1\}}\right]$

$$= \frac{n}{a_n^2}L(a_n) - n\,\mathbb{E}^2\left[\frac{X}{a_n}1_{\{|X|\le a_n\}}\right] \to 1.$$

$\therefore$ 由 L-F 条件 . . . □.

3. 设 $\{X_n; n\in\mathbb{N}\}$ 独立, 且 $\mathbb{P}(X_n=\pm 2^n) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

$\mathbb{P}(X_n=\pm 1) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})$ $n\ge 1$.

证明: X_n 不符合 Lindeberg 条件, 但是服从中心极限定理.

pf: ① 不合 Lindeberg 条件:

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2 1_{\{|X_k|\ge 1\}}\right] \ge \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[2^{2k}\cdot\frac{1}{2^k}\right] \to +\infty$$

as $n\to\infty$.

② 服从 CLT: 令 $Y_n = sgn(X_n) = \begin{cases}1 \\ -1\end{cases}$ with prob. $\frac{1}{2}$ each. iid.

$\mathbb{P}(Y_n\ne X_n) = \frac{1}{2^n}$. $\therefore \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(Y_n\ne X_n) < \infty \overset{B\text{-}C引理}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(Y_n\ne X_n\ i.o.)=0$

$\mathbb{E}Y_n=0$. $\mathbb{E}Y_n^2 = Var\,Y_n = 1$. 由 CLT 及 Slutsky 定理

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad as\ n\to\infty$$

□

4. X_n 独立, $B_n^2 = \sum_{k=1}^n Var(X_k)\to\infty$

$|X_n|\le C_n = o(B_n)$. 证明: $\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{B_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$

证明: 令 $Y_k = \frac{X_k-\mathbb{E}X_k}{B_n}$.

则 $\mathbb{E}Y_k=0$. $\sum_{k=1}^n Var\,Y_k$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n Var\,X_k}{B_n^2} = 1.$$

$\forall\varepsilon>0$.

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[Y_k^2 1_{\{|Y_k|\ge\varepsilon\}}\right] = \sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{B_n^2}\mathbb{E}\left[|X_k-\mathbb{E}X_k|^2 1_{\{|X_k-\mathbb{E}X_k|\ge\varepsilon B_n\}}\right]\right]$$ ①

n 充分大.

$|X_k-\mathbb{E}X_k|\le 2C_k = o(B_n)$. as $n\to\infty$

$\therefore n$ 充分大时 $(\exists N,\forall n>N)$ $|X_k-\mathbb{E}X_k| < B_n\varepsilon$.

$\therefore$ ① $= \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left[\frac{1}{B_n^2}(X_k-\mathbb{E}X_k)^2\right] \to 0$. as $n\to\infty$

$\therefore Y_n$ 满足 L-F 条件. 由 CLT 即得. □.

5. $Y, X_1,\dots X_n$ iid. $\sim \mathbb{E}X=0$. $\mathbb{E}X^2=1$.

$\{b_n\}\ge 0$. $b_n = o(B_n)$. as $n\to\infty$

$B_n^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2$. 证明: $\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^n b_k X_k \xrightarrow{d} N(0,1)$.

证: $Y_k = \frac{b_k X_k}{B_n}$ $1\le k\le n$. $\mathbb{E}Y_k=0$.

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_k^2 = \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^n b_k^2 X_k^2 = \frac{\sum_{k=1}^n b_k^2}{B_n^2} = 1.$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[Y_k^2 1_{\{|Y_k|\ge\varepsilon\}}\right] = \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[b_k^2 X^2 1_{\{|X|\ge\frac{B_n}{b_k}\varepsilon\}}\right]$$

对固定 n. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$. s.t. $\forall k>N$.

$|X_k| < \frac{B_n}{b_k}\varepsilon$.

$\therefore \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[b_k^2 X_k^2 1_{\{|X_k|\ge\frac{B_n}{b_k}\varepsilon\}}\right]$ 只有有限项

$\cdots\to 0.$

□.

设 $\{X, X_n\}$ iid. $EX=0$. $EX^2=1$

ν_n 是独立之 r.v. $\nu_n \in \mathbb{Z}_+$. $\nu_n \xrightarrow{a.s.} \infty$

证明: $$\frac{\sum_{k=1}^{\nu_n} X_k}{\sqrt{\nu_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

证明:

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu_n} X_k}{\sqrt{\nu_n}} \le x\right) - \Phi(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{\nu_n} X_k}{\sqrt{\nu_n}} \le x \,\middle|\, \nu_n = m\right)\mathbb{P}(\nu_n = m) - \Phi(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{m} X_k}{\sqrt{m}} \le x \,\middle|\, \nu_n = m\right) - \Phi(x)\right)\mathbb{P}(\nu_n = m)\right|$$

$\downarrow$ $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N$. $\forall n > N$. $\left|\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{n}} \le x\right) - \Phi(x)\right| < \varepsilon$.

$$\le \underbrace{\sum_{m=N+1}^{\infty}}_{<\varepsilon} + \underbrace{\sum_{m=1}^{N}}_{\le \mathbb{P}(\nu_n \le N)}$$

令 $n\to\infty$ 有 $\limsup_{n\to\infty} \left|\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{n}} \le x\right) - \Phi(x)\right| \le \varepsilon$.

令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得.

$\square$

§3 补充习题:

T 为 Ω 上之非负r.v. $A \subset \Omega$. 令 $T_A = T 1_A + (+\infty) 1_{A^c}$.

若 T 为停时. $A \in \mathcal{F}_\infty$. 则 T_A 为停时 $\Longleftrightarrow A \in \mathcal{F}_T$.

证明: $\Leftarrow$ $\{T_A \le t\} = \{T \le t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$.

$\Rightarrow$: $A \cap \{T < \infty\} = \{T_A < \infty\} \in \mathcal{F}_{T_A}$

$$\begin{aligned} &A \cap \{T<\infty\} \cap \{T_A = T\} \\ &\in \mathcal{F}_{T_A} \cap \{T_A = T\} = \mathcal{F}_T \cap \{T_A = T\} \\ &\in \mathcal{F}_T \end{aligned}$$

$\Rightarrow A \in \{T = \infty\} \in \mathcal{F}_T$

$\square$